$y_p'(t) = -e^{-t}(at^2+bt+c) + e^{-t}(2at+b)$

$y_p''(t) = +e^{-t}(at^2+bt+c) - 2e^{-t}(2at+b) + e^{-t}\times 2a$,

Donc

$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t}\cancel{(at^2+bt+c)} - 2\cancel{e^{-t}(2at+b)} + 2ae^{-t}$
$- 2e^{-t}\cancel{(at^2+bt+c)} + 2\cancel{e^{-t}(2at+b)}$
$+ e^{-t}\cancel{(at^2+bt+c)} = 2e^{-t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2ae^{-t} = 2e^{-t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a = 2$

(car $t \mapsto e^{-t}$ ne s'annule pas)

$\iff a = 1$.

Soit $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2 e^{-t} \end{array}$. D'après les équiv. précédentes, $y_p \in S$.

(f) : $y'' + 2y' + 5y = (2\cos(2t) - 3\sin(2t))e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ (sol. réelles).

L'éq. caract. est : $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Comme $\Delta = 4 - 4\times 5 = -4^2 = (4i)^2$, les racines sont $r = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$ et $\bar{r}$. Par le cours,

$S_0 = \{k_1 y_1 + k_2 y_2,\ (k_1;k_2) \in \mathbb{R}^2\}$

où $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{Re}(e^{rt}) = e^{-t}\cos(2t) \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{Im}(e^{rt}) = e^{-t}\sin(2t) \end{array}$.

Par le cours,

$S = \{ y_p + y \,;\, y \in S_0 \}$

où y_p est une sol. de $\mathcal{E}$.

On regarde le second membre :

$(2\cos(2t) - 3\sin(2t))e^{-t} \overset{?}{=} \mathrm{Re}(c e^{\alpha t})$

$2\cos(2t)e^{-t} = \mathrm{Re}(2 e^{2it} e^{-t}) = \mathrm{Re}(2 e^{(2i-1)t})$

et

$-3\sin(2t)e^{-t} = \mathrm{Im}(-3 e^{2it} e^{-t}) = \mathrm{Im}(-3 e^{(2i-1)t})$

$= \mathrm{Re}(3i e^{(2i-1)t})$!!

donc $= \mathrm{Re}((2+3i)e^{(2i-1)t})$

On cherche une sol. complexe z_p de

$y'' + 2y' + 5y = (2+3i)e^{(2i-1)t}$

puis on prend $y_p = \mathrm{Re}(z_p)$.

On cherche une sol. $z_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de

$y'' + 2y' + 5y = (2+3i)e^{(2i-1)t}$ de la forme $\rightarrow$ sol. $\tilde{S}$

$z_p(t) = e^{(2i-1)t}(at+b)$, $(a;b) \in \mathbb{C}^2$

(car $2i-1$ est sol. simple de l'éq. caract.).

On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$z_p'(t) = (2i-1)e^{(2i-1)t}(at+b) + e^{(2i-1)t} a$

$z_p''(t) = (2i-1)^2 e^{(2i-1)t}(at+b) + 2a e^{(2i-1)t}(2i-1)$

$\boxed{9}$

Donc

$$z_p \in \tilde{S} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ (2i-1)^2 e^{(2i-1)t}(at+b) + 2a e^{(2i-1)t}(2i-1) + 2(2i-1)e^{(2i-1)t}(at+b) + 2a e^{(2i-1)t} + 5 e^{(2i-1)t}(at+b) = (2+3i)e^{(2i-1)t}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \left((2i-1)^2 + 2(2i-1) + 5\right)(at+b) + 2a \times 2i = 2+3i$$

(car $t \mapsto e^{(2i-1)t}$ ne s'annule pas)

$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 0 \times (at+b) + 4ai = 2+3i$$

cf. éq. caract.

$$\iff a = \frac{2+3i}{4i} = -\frac{2i-3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{i}{2}.$$

Soit $z_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{(2i-1)t}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - i\right)t. \end{array}$

D'après les éq. précédentes, $z_p \in \tilde{S}$.

Soit $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{Re}(z_p(t)). \end{array}$

y_p est 2 fois dérivables et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$y_p''(t) + 2y_p'(t) + 5y_p(t) = \mathrm{Re}\left(z_p''(t) + 2z_p'(t) + 5z_p(t)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left((2+3i)e^{(2i-1)t}\right) \quad (\text{cf. } z_p \in \tilde{S})$$
$$= e^{-t}\,\mathrm{Re}\left((2+3i)(\cos(2t) + i\sin(2t))\right)$$
$$= e^{-t}\left(2\cos(2t) - 3\sin(2t)\right).$$

Donc $y_p \in S$.

Ex. 2.1.

(a) : modification de l'énoncé

1- Soit $y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto e^{3t} + e^{-t} \end{array}$. On suppose que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, y est sol. de l'éq.

(e_0) : $y'' + ay' + b = 0$.

Déterminer a et b.

2- Pour cette valeur de $(a;b)$, vérifier que y est bien sol. de (e_0).

1- On sait que, pour tout t,
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$
donc en prenant 2 valeurs ≠ de t
on obtient un syst. de 2 éq. que doivent vérifier a et b.
On en déduit a et b.

On va légèrement modifier cette idée.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, par hyp.,

$$0 = e^{-3t}\left(y''(t) + a y'(t) + b y(t) \right).$$

Or, $y'(t) = 3e^{3t} - e^{-t}$ et $y''(t) = 9e^{3t} + e^{-t}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = e^{-3t}\left(9e^{3t} + e^{-t} + a(3e^{3t} - e^{-t}) + b(e^{3t} + e^{-t}) \right)$$

Soit

$$0 = 9 + \underbrace{e^{-4t}}_{\substack{\downarrow t\to+\infty \\ 0}} + a(3 - \underbrace{e^{-4t}}_{\substack{\downarrow t\to+\infty \\ 0}}) + b(1 + \underbrace{e^{-4t}}_{\substack{\downarrow t\to+\infty \\ 0}})$$

d'où $0 = 9 + 3a + b$.

Par ailleurs, pour $t=0$, on a

$0 = y''(0) + a y'(0) + b y(0) = 10 + 2a + 2b$.

Donc $b = -9 - 3a$ et

$0 = 10 + 2a - 2(9 + 3a) = -8 - 4a$.

Donc $a = -2$ et $b = -3$.

$\checkmark$

2 - $a = -2$ et $b = -3$.

au choix

on vérifie directement que y est sol. de $y'' - 2y' - 3y = 0$	on résoud l'éq. $y'' - 2y' - 3y = 0$ et on vérifie que $y \in S_0$.

L'éq. caractéristique associée à : $y'' - 2y' - 3y = 0$ est $z^2 - 2z - 3 = 0$. Comme $\Delta = 4 + 4\times3 = 4^2$ les racines sont $\frac{2+4}{2} = 3$ et $\frac{2-4}{2} = -1$. Donc $S_0 = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(y_1 ; y_2)$ où

$y_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{3t}\end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t}\end{array}$.