Comme $y = y_1 + y_2$, $y \in S_0$.
Donc y est sol. de $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Ex. 2.3

(a) : Modification de l'énoncé.

1 - Soit $y_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} + e^{-2t} + e^{t}\end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 2e^{-t} + e^{t}\end{array}$.

On suppose que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, y_1 et y_2 sont sol. de $(E) : y'' + ay' + by = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer a, b et f.

2 - Pour ces valeurs de a, b et f, vérifier que y_1 et y_2 sont sol. de (E).

1 - (par le cours, on sait que $y = y_1 - y_2 \in S_0$ d'après l'ex. préc., on va en déduire les valeurs de a et b. Ensuite, on écrira simplement $f(t) = y_1''(t) + a y_1'(t) + b y_1(t)$
ou $= y_2''(t) + a y_2'(t) + b y_2(t)$)

Par hyp. et le cours, $y := y_1 - y_2 \in S_0$ avec
$y : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-2t} - e^{-t}\end{array}$, $y' : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -2e^{-2t} + e^{-t}\end{array}$ et

$y'' : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 4e^{-2t} - e^{-t}\end{array}$.

13

Donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = 4e^{-2t} - e^{-t} + a(-2e^{-2t} + e^{-t}) + b(e^{-2t} - e^{-t}) \quad (*)$$

donc

$$\underbrace{0 \times e^{t}}_{\to 0 \, (t \to +\infty)} = \underbrace{4e^{-t}}_{\to 0 \, (t \to +\infty)} - 1 + a(\underbrace{-2e^{-t}}_{\to 0 \, (t \to +\infty)} + 1) + b(\underbrace{e^{-t}}_{\to 0 \, (t \to +\infty)} - 1)$$

d'où $0 = -1 + a - b$. De plus, par $(*)$ avec $t = 0$, on a : $0 = 4 - 1 + a(-2+1) + b(1-1)$

soit $0 = 3 - a$. Donc $a = 3$ et $b = 2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, comme y_2 est sol. de l'éq.,

$$f(t) = y_2''(t) + 3y_2'(t) + 2y_2(t) = (2e^{-t} + e^{t}) + 3(-2e^{-t} + e^{t}) + 2(2e^{-t} + e^{t})$$

$$= 6e^{t}.$$

2_ On vérifie que y_1 et y_2 sont sol. de

(e) : $y'' + 3y' + 2y = 6e^{t}$, sur $\mathbb{R}$.

(on peut calculer $y_1''(t) + 3y_1'(t) + 2y_1(t)$
ou $y_2''(t) + 3y_2'(t) + 2y_2(t)$
et vérifier que cela donne $f(t)$
on va suivre une autre méthode)

On résout (e). L'éq. caract. est $z^2 + 3z + 2 = 0$.

Comme $\Delta = 9 - 4\times 4 = 1$, les racines sont

$$\frac{-3+1}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{-3-1}{2} = -2$$

donc

$$S_0 = \{ k_1 x_1 + k_2 x_2 \, ; \, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

où $x_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{array}$ et $x_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto e^{-2t} \end{array}$.

D'après le choix de f, y_2 est sol. de (e). Comme $S = \{ y_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 \, ; \, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

et comme

$$y_1 = y_1 - y_2 + y_2 = x_2 - x_1 + y_2 ,$$

$y_1 \in S$ donc y_1 est sol. de (e).

Ex. 3.2.

Pour calculer le degré, on peut utiliser le cours :

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P ; \deg Q)$ $\nearrow$ $=$ si $\deg P \neq \deg Q$; $\searrow$ peut être $<$ si $\deg P = \deg Q$

cf. $P = 1 - X^2$ et $Q = X^2$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

avec la convention : $-\infty + n = -\infty$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour le calcul du terme dominant d'un produit, on vérifie que c'est le produit des termes dominants de chaque facteur.

$$\deg P = \deg\left((X+1)^2\right) + \deg(X-2)$$
$$= 2\deg(X+1) + 1 = 3.$$

$$\deg Q = 3\deg\left(X^2+1\right) = 6.$$

$$\deg R = 2\deg(X+3) + 2\deg(X^2-5)$$
$$= 2 + 4 = 6.$$

On devine que le terme dominant de P est X^3

———————— Q — X^6

———————— R — X^6

on évite de développer !

On a

$P = (X+1)^2 X + Q_1$ avec $Q_1 = -2(X^2+1)$ de deg 2

$= (X+1)X^2 + Q_2 + Q_1$ avec $Q_2 = (X+1)X$ de deg 2

Donc
$$P = X^3 + \underbrace{X^2 + Q_2 + Q_1}_{\text{de deg.} \leq 2}.$$

Donc le terme dominant de P est X^3.

De m.

$$Q = (X^2+1)^2 X^2 + Q_1 \text{ avec } Q_1 = (X^2+1)^2 \text{ de deg } 4$$
$$= (X^2+1) X^4 + Q_2 + Q_1 \text{ avec } Q_2 = (X^2+1)X^2 \text{ de deg } 4$$
$$= \underbrace{X^6}_{\text{terme dominant.}} + \underbrace{X^4 + Q_2 + Q_1}_{\text{de deg} \leq 4}$$

$$R = X(X+3)(X^2-5)^2 + Q_1 \text{ avec } \underset{\text{de deg } 5}{Q_1 = 3(X+3)(X^2-5)^2}$$
$$= X^2(X^2-5)^2 + Q_2 + Q_1 \text{ avec } \underset{\text{de deg } 5}{Q_2 = 3X(X^2-5)^2}$$
$$= X^4(X^2-5) + Q_3 + Q_2 + Q_1 \text{ avec } \underset{\text{de deg } 5}{Q_3 = -5(X^2-5)X^2}$$
$$= \underbrace{X^6}_{\text{terme dominant.}} - \underbrace{5X^4 + Q_3 + Q_2 + Q_1}_{\text{deg} \leq 5}$$

Ex. 3.3. <u>Rappel</u> : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(a;b) \in \mathbb{C}^2$,
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$