Ex. 3.3.

$\deg P_n \leq n$ car $\deg(X+1)^n = n$ et $\deg(X-1)^n = n$,

mais on peut avoir $\deg P_n < n$

On doit modifier l'écriture de P_n.

Pour $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a^p - b^p = (a-b) \sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}$$

Cette formule a été établie en utilisant des propriétés des lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$. Comme les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{K}[X]$ ont ces propriétés, on a aussi

pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$P^p - Q^p = (P-Q) \sum_{k=0}^{p-1} P^k Q^{p-1-k}$$

On a

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n = \big((X+1)-(X-1)\big) \sum_{k=0}^{n-1} (X+1)^k (X-1)^{n-1-k}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (X+1)^k (X-1)^{n-1-k}.$$

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p) = ($ le terme dominant de $(X+a)^p$ est $X^p)$.

Comme $(X+a)^0 = 1 = X^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}$. On a

$$(X+a)^{p+1} = (X+a)^p (X+a) \underset{HR}{=} (X^p + Q_p)(X+a)$$

où $\deg Q_p < p$. Donc

$$(X+a)^{p+1} = X^{p+1} + \underbrace{aX^p + Q_p(X+a)}_{\deg \leq p}$$ donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie

Par le Th. de réc., $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Donc, pour $k \in \mathbb{N} \cap [0; n-1]$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq. $\deg Q_k < k$, $\deg R_k < n-1-k$,
$$(X+1)^k = X^k + Q_k \quad \text{et} \quad (X-1)^{n-1-k} = X^{n-1-k} + R_k.$$

Donc
$$P_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (X^k + Q_k)(X^{n-1-k} + R_k)$$
$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (X^{n-1} + Q_k(X^{n-1-k} + R_k) + X^k R_k)$$
$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1} + \underbrace{2 \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\underbrace{Q_k (X^{n-1-k} + R_k)}_{\deg < n-1} + \underbrace{X^k R_k}_{\deg < n-1}\Big]}_{\deg < n-1}$$
$$= 2n X^{n-1} + Q_n$$
avec $\deg Q_n < n$. Donc $\deg P_n = n-1$ et son terme dominant est $2n X^{n-1}$.

Alternative : on devine en regardant P_1, P_2, P_3 que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathcal{Q}(n) = ($ le terme dominant de P_n est $2n X^{n-1})$.
Comme $P_1 = (X+1) - (X-1) = 2 = 2 \times X^0 = 2 \times 1 \times X^{1-1}$,
$\mathcal{Q}(1)$ est vraie. Supp. $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un $n > 0$. On a :

$$P_{n+1} = (X+1)(X+1)^n - (X-1)^{n+1}$$
$$= (X+1)\left[(X+1)^n - (X-1)^n\right] + (X+1)(X-1)^n - (X-1)^n(X-1)$$
$$= (X+1)\left[2nX^{n-1} + Q_{n-1}\right] + (X-1)^n\left(X+1 - (X-1)\right)$$

avec $\deg Q_{n-1} < n-1$. Donc

$$P_{n+1} = 2n(X+1)X^{n-1} + (X+1)Q_{n-1} + 2(X-1)^n$$
$$= 2nX^n + \underbrace{2nX^{n-1} + (X+1)Q_{n-1}}_{\deg < n} + 2(X^n + \underbrace{R_n}_{\deg < n})$$

(cf. $\mathcal{P}(n)$ avec $a=-1$)

$$= 2(n+1)X^n + S.$$

avec $\deg S < n$. Donc $Q(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de récu., $Q(n)$ est vraie pour tout n.

<u>2è Alternative</u> : On utilise la formule du binôme :

Pour $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut la montrer par récu. en utilisant les prop. de base des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$. Elle est donc aussi valable pour $(a;b)$ remplacé par $(P;Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

On a donc

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}.$$

D'après cette formule, on a

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[1-(-1)^{n-k}\right] \binom{n}{k} X^k$$

$$= \underbrace{\left(1-(-1)^{n-n}\right)}_{0} \binom{n}{n} X^n + \left(1-(-1)^{n-(n-1)}\right) \binom{n}{n-1} X^{n-1}$$

$$+ Q_n$$

où $\deg Q_n < n-1$. Donc

$$P_n = 0 + 2\binom{n}{n-1} X^{n-1} + Q_n = 2n X^{n-1} + Q_n .$$

(ii) :

$$Q_n = (X+1)^{2n} - (X^2+1)^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^{2\ell}$$

$$= \cancel{\binom{2n}{2n} X^{2n}} + \binom{2n}{2n-1} X^{2n-1} - \cancel{\binom{n}{n} X^{2n}} + R_n$$

avec $\deg R_n \leq 2n-2$. Donc

$$Q_n = \underbrace{2n X^{2n-1}}_{\text{terme dominant.}} + R_n .$$

Division euclidienne :

Cours : Pour $(A;B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$,
il existe un unique $(Q;R) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{et } \deg R < \deg B. \end{cases}$$

Q : quotient, R : reste de la div. eucl. de A par B.

Rq. : Si $\deg A < \deg B$ alors
$$A = 0 \times B + A$$
est la division euclidienne de A par B.

Exemples :
$$X^4 + 1 = 0 \times (X^7 - \pi X^3 + 13) + X^4 + 1.$$

$$\begin{array}{l|l}
X^4 + 1 & 2X^4 - 4X^2 + 3 \\ \cline{2-2}
-(X^4 - 2X^2 + \frac{3}{2}) & \frac{1}{2} \leftarrow \text{quotient} \\ \cline{1-1}
2X^2 - \frac{1}{2} \leftarrow \text{reste.} &
\end{array}$$

Ex. 3.10 :

$$\begin{array}{l|l}
X^3 + 3X^2 + 2X - 1 & X^2 - X - 1 \\ \cline{2-2}
-(X^3 - X^2 - X) & X + 4 \\ \cline{1-1}
\quad 4X^2 + 3X - 1 & \\
\quad -(4X^2 - 4X - 4) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 7X + 3 &
\end{array}$$