$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 + X - 2 & X^2 - 2X + 4 \\
\cline{2-2}
-(X^4 - 2X^3 + 4X^2) & X^2 + X - 2 \\
\cline{1-1}
X^3 - 4X^2 + X - 2 & \uparrow \text{ quotient.} \\
-(X^3 - 2X^2 + 4X) & \\
\cline{1-1}
-2X^2 - 3X - 2 & \\
-(-2X^2 + 4X - 8) & \\
\cline{1-1}
-7X + 6 & \leftarrow \text{reste}
\end{array}
$$

✓

Exemple :
ds $\mathbb{C}[X]$

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + i & X^2 - iX + 1 \\
\cline{2-2}
-(X^3 - iX^2 + X) & X + i \\
\cline{1-1}
iX^2 - X + i & \nwarrow \text{ quotient.} \\
-(iX^2 + X + i) & \\
\cline{1-1}
-2X & \leftarrow \text{reste}
\end{array}
$$

Ex. 3.7

Rappel : B divise A s'il existe C t.q.

$$A = BC.$$

Rq. : B divise A ssi le reste de div. eucli. de A par B est 0.

Par hyp., il existe $(B, C) \in \mathbb{R}[X]^2$ t.q.

$$P = QA \quad \text{et} \quad Q = PB$$

Donc $\deg P = \deg Q + \deg A$
et $\deg Q = \deg P + \deg B$

Si $P=0$ alors $Q=PB=0$
et $P=kQ$ pour tout $k\in\mathbb{R}$.

Si $Q=0$ alors $P=QA=0$ et
$P=kQ$ pour tout $k\in\mathbb{R}$.

Supp. $P\neq 0$ et $Q\neq 0$. Nécessairement $A\neq 0$ et $B\neq 0$.
Donc $\deg P=\deg Q+\deg A \geqslant \deg Q$
et $\deg Q=\deg P+\deg B\geqslant \deg P$.
D'où $\deg P=\deg Q$ et $\deg A=\deg B=0$.
Donc il existe $k\in\mathbb{R}^*$ t.q. $A=k$ et $P=kQ$.

<u>Ex. 34</u>. Comme la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$ est 4 et qu'il y a 4 poly. dans la famille considérée, il suffit de montrer que cette famille est libre
(C'est plus facile que de montrer que cette famille est génératrice.)
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ t.q. $\sum_{j=1}^{4}\lambda_j P_j=0$.
On a donc
$$\sum_{j=1}^{4}\lambda_j P_j(0)=0\quad,\quad \sum_{j=1}^{4}\lambda_j P_j(1)=0$$
$$\sum_{j=1}^{4}\lambda_j P_j(2)=0 \text{ et } \sum_{j=1}^{4}\lambda_j P_j(3)=0$$

Donc

$0+0+0+\lambda_4 P_4(0)=0$, $0+0+\lambda_3 P_3(1)+0=0$

$0+\lambda_2 P_2(2)+0+0=0$ et $\lambda_1 P_1(3)+0+0+0=0$.

Comme $P_4(0)=-6\neq 0$, $P_3(1)=2\neq 0$, $P_2(2)=-2\neq 0$ et $P_1(3)=6\neq 0$, on en déduit que $\lambda_4=\lambda_3=\lambda_2=\lambda_1=0$. La famille $(P_1; P_2; P_3; 4)$ est donc libre. C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ex. 3.5 : (D'après le cours, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$\deg P_n = n \times \deg(X-n) = n$ (ceci est bien valable pour $n=0$).

La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ est donc échelonnée en degré.
Par le cours, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Algorithme d'Euclide : Soit $(P;Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.
On effectue la suite forcément finie de div. eucl. suivantes :

$P = QQ_1 + R_1$

$Q = R_1 Q_2 + R_2$

$R_1 = R_2 Q_3 + R_3$

— — — —

$R_{n-2} = R_{n-1} Q_n + R_n$

$R_{n-1} = R_n Q_{n+1} + 0$

Il se trouve que

$PGCD(P;Q) = PGCD(Q;R_1)$

$= PGCD(R_1;R_2)$

— — — —

$= PGCD(R_{n-1};R_n) = \tilde{R}_n$

$\tilde{R}_n = \dfrac{R_n}{\text{coeff. dom. de } R_n}$

car R_n divise R_{n-1}

De plus, on peut aussi trouver U et V ds $\mathbb{K}[X]$

t.q. $PU + QV = PGCD(P;Q)$.

Il suffit de "remonter les calculs" :

$$R_n = R_{n-2} - R_{n-1}Q_n$$

$$= R_{n-2} - \left(R_{n-3} - R_{n-2}Q_{n-2}\right)Q_n$$

$$= R_{n-2}\left(1+Q_{n-2}\right)Q_n - \underbrace{R_{n-3}Q_n}_{\text{à remplacer}}$$

$$\underbrace{R_n}_{\text{coeff dom de } R_n} = UP + VQ.$$

<u>Exemple</u> : $P = X^6 + X^2$, $Q = X^3 + X^2$.

$$\begin{array}{r|l}
X^6 + X^2 & X^3 + X^2 \\ \cline{2-2}
-(X^6 + X^5) & X^3 - X^2 + X - 1 \\ \cline{1-1}
-X^5 + X^2 & \\
-(-X^5 - X^4) & \\ \cline{1-1}
X^4 + X^2 & \\
-(X^4 + X^3) & \\ \cline{1-1}
-X^3 + X^2 & \\
-(-X^3 - X^2) & \\ \cline{1-1}
2X^2 &
\end{array}$$

$$P = Q\left(X^3 - X^2 + X - 1\right) + \underbrace{2X^2}_{R_1}$$

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + X^2 & 2X^2 \\ \cline{2-2}
-X^3 & \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
X^2 & \\
0 &
\end{array}$$

$$Q = R_1 \times \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{2}\right) + 0,$$

$$PGCD(P;Q) = \frac{2X^2}{2} = X^2$$

De plus :

$$\underbrace{X^2 = \frac{1}{2} \times P - Q\frac{\left(X^3 - X^2 + X - 1\right)}{2}}_{\text{identité de Bezout}}.$$