3.11.

$$\begin{array}{r} X^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ -(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1) \\ \hline 4x \end{array} \quad \begin{array}{|l} x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \\ - x^5 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \\ -(-x^4) \\ \hline 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \\ - 2x^3 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 \\ -(-2x^2) \\ \hline 2x - 1 \\ - 2x \\ \hline -1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 4x \\ \hline \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1x}{2} + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x \\ -(4x) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} -1 \\ \hline -4x \end{array}$$

Donc $P = Q + \underbrace{4x}_{R_1}$

$Q = R_1 \times \frac{1}{4}(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2) \overbrace{-1}^{R_2}$

$R_1 = R_2(-4x) + \underline{0}$

Donc $PGCD(P; Q) = \frac{1}{-1} R_2 = 1$.

De plus

$1 = R_1 \frac{1}{4}(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2) - Q$ <u>Bezout</u>

$= (P - Q) \frac{1}{4}(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2) - Q$

$= P \cdot \underbrace{\frac{1}{4}(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2)}_{U} - \underbrace{\frac{1}{4}(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 6)}_{V} Q$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3+4x^2+2x+1 & 3x^3+4x^2+4x+1 \\ \hline -\left(2x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right) & \frac{2}{3}x+\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+1 & \\ -\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}\right) & \\ \frac{8}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{8}{9} & \end{array}$$

$$P = Q\left(2x+\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{1}{3} + \tfrac{8}{9}\underbrace{(x^2+x+1)}_{R_1}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+4x^2+4x+1 & x^2+x+1 \\ \hline -(3x^3+3x^2+3x) & 3x+1 \\ x^2+x+1 & \\ -(x^2+x+1) & \\ 0 & \end{array}$$

$Q = R_1(3x+1)+0$.

donc

$Q = \frac{8}{9}R_1 \times \frac{9}{8}(3x+1)+0$.

D'où $PGCD(P;Q) = R_1$.

De plus,

$$R_1 = \left[P - Q\left(2x+\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{1}{3}\right]\tfrac{9}{8}$$

$$= \tfrac{9}{8}P - Q\left(2x+\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{3}{8}.$$

Bezout.

Ex. 3.12

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2+1 \\ \hline -(x^3+x) & x \\ -x+1 & \end{array}$$

$$P = Qx + \overbrace{1-x}^{R_1}$$

$$Q = -R_1(x+1) + \overbrace{2}^{R_2}$$

$$R_1 = R_2\,\frac{-x+1}{2}+0$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & -x+1 \\ \hline -(x^2-x) & -x-1 \\ x+1 & \\ -(x-1) & \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -x+1 & 2 \\ \hline -(-x) & -\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ 1 & \\ -(1) & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $PGCD(P;Q) = \frac{R_2}{2} = 1$.

De plus :

$1 = [Q + R_1(x+1)]\frac{1}{2}$

$1 = \frac{1}{2}Q + \frac{x+1}{2}(P - Qx)$

$1 = \frac{x+1}{2}P + \left(\frac{1}{2} - \frac{x(x+1)}{2}\right)Q$.

3.13.

Cours : $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

(i). $P = X^4 - 1$, $P' = 4X^3$, $P'' = 12X^2$, $P^{(3)} = 24X$

$P^{(4)} = 24$. Donc

$$P = \sum_{k=0}^{4} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0 + 4(X-1) + \frac{12}{2}(X-1)^2 + \frac{24}{2\times 3}(X-1)^3 + \frac{24}{2\times 3\times 4}(X-1)^4$$

$$= 4(X-1) + 6(X-1)^2 + 4(X-1)^3 + (X-1)^4.$$

$$P = \sum_{k=0}^{4} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^k = 0 - 4(X+1) + \frac{12}{2}(X+1)^2 - \frac{24}{2\times 3}(X+1)^3 + \frac{24}{2\times 3\times 4}(X+1)^4$$

$$= -4(X+1) + 6(X+1)^2 - 4(X+1)^3 + (X+1)^4.$$

(ii) $Q = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$, $Q' = 3X^2 - 10X + 3$,

$Q'' = 6X - 10$, $Q^{(3)} = 6$.

On a

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 8 - 4(X-1) - \frac{4}{2}(X-1)^2 + \frac{6}{2\times 3}(X-1)^3$$

$$= 8 - 4(X-1) - 2(X-1)^2 + (X-1)^3.$$

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \frac{Q^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^k = 0 + 16(X+1) - \frac{16}{2}(X+1)^2 + \frac{6}{2\times 3}(X+1)^3$$

$$= 16(X+1) - 8(X+1)^2 + (X+1)^3.$$

$$R = (X^2+X+1)^2 + 1,$$

$$R' = 2(X^2+X+1)(2X+1)$$

$$R'' = 2(2X+1)^2 + 4(X^2+X+1)$$

$$R^{(3)} = 8(2X+1) + 4(2X+1) = 12(2X+1)$$

$$R^{(4)} = 24$$

$$R = \sum_{k=0}^{4} \frac{R^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 10 + 18(X-1) + \frac{30}{2}(X-1)^2 + \frac{3\times 12}{2\times 3}(X-1)^3 + \frac{24}{2\times 3\times 4}(X-1)^4$$

$$= 10 + 18(X-1) + 15(X-1)^2 + 6(X-1)^3 + (X-1)^4$$

$$R = \sum_{k=0}^{4} \frac{R^{(k)}(-1)}{k!}(X+1)^k = 2 - 2(X+1) + \frac{6}{2}(X+1)^2 - \frac{12}{2\times 3}(X+1)^3 + \frac{24}{2\times 3\times 4}(X+1)^4$$

$$= 2 - 2(X+1) + 3(X+1)^2 - 2(X+1)^3 + (X+1)^4,$$

<u>Ex. 3.14</u> La famille contient $n+1$ poly. de $\mathbb{R}[X]$ et est échelonnée en degré donc, par le cours, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit la formule de Taylor de P en a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Par unicité de la décomp. dans une base, les coord. de P dans la base considérée sont les $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, $k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$.

Ex 3.15

(Rappel : Si a est racine de P, $(X-a) \mid P$
en effet : par div. eucl. $P = (X-a)Q + R$
avec $\deg R \leq 0$. Donc R est constant.
De plus $0 = P(a) = 0 \times Q(a) + R$ donc $R = 0$)

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(r) = ($ tout poly. ayant r racines distinctes $a_1, \dots, a_r$ est divisible par $\prod_{j=1}^{r}(X - a_j)$).

Soit P ayant une racine a. Par div. euclid.,
$P = (X-a)Q + R$ avec $\deg R \leq 0$.
Donc R est ct. De plus, $0 = P(a) = 0 \times Q(a) + R$
donc $R = 0$ et $(X-a) \mid P$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(r)$ vraie pour un $r \in \mathbb{N}^*$.
Soit P un poly. ayant $r+1$ racines distinctes : $a_1; \dots; a_{r+1}$. Par division euclidienne,
$P = (X - a_{r+1})Q + R$ et, comme $\deg R \leq 0$ et $P(a_{r+1}) = 0$, $R = 0$. Pour $j \in [0; r] \cap \mathbb{N}$, on a

$$0 = P(a_j) = \underbrace{(a_j - a_{r+1})}_{\neq 0} Q(a_j).$$

Donc Q a r racines distinctes. Par hyp. de récu. $\prod_{j=1}^{r}(X - a_j)$ divise Q. Il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tq.

$$Q = C\prod_{j=1}^{r}(X-a_j)$$

donc

$$P = C.\ \prod_{j=1}^{r+1}(X-a_j)$$

et $\prod_{j=1}^{r+1}(X-a_j)$ divise P.

Donc $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie. Par le Th. de récurrence, $\mathcal{P}(r)$ est vraie pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Alternative : Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant r racines distinctes : $a_1 ; \dots ; a_r$.

Par division euclidienne,

$$P = \left[\prod_{j=1}^{r}(X-a_j)\right]Q + R. \quad (*)$$

avec $\deg R < r$. Pour $k \in [1 ; r] \cap \mathbb{N}$,

$$0 = P(a_k) = 0 \times Q(a_k) + R(a_k).$$

Donc R a r racines distinctes. Comme $\deg R < r$, on a $R = 0$, par le cours. Donc, par $(*)$, $\prod_{j=1}^{r}(X-a_j)$ divise P.

✓

En étudiant le discriminant, on voit que

$$X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\bar{j}) \quad \text{où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$