32

$X^2+X+1 \mid (X+1)^n - X^n - 1$

SSi j et $\bar{j}$ sont racines de $(X+1)^n - X^n - 1$

$\Rightarrow)$ clair et $\Leftarrow)$ cf. le résultat précédent.

on cherche donc n tq. $\begin{cases} (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \\ \text{et} \\ (\bar{j}+1)^n - \bar{j}^n - 1 = 0 \end{cases}$

Rq. $(j+1)^n - j^n - 1 = 0 \iff \overline{(j+1)^n - j^n - 1} = 0$

$\iff \overline{(j+1)^n} - \overline{j^n} - 1 = 0$

$\iff (\overline{j+1})^n - \bar{j}^n - 1 = 0$

$\iff (\bar{j}+1)^n - \bar{j}^n - 1 = 0$

donc on cherche n tq. $(j+1)^n - j^n - 1 = 0$.

or $j+1 = -j^2$ donc $(j+1)^n - j^n - 1 = 0$

$\iff (-1)^n (j^n)^2 - j^n - 1 = 0$

$\iff (-1)^{n+1} (j^n)^2 + j^n + 1 = 0$

$(-1)^{n+1} X^2 + X + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)^{n+1}$ $\nearrow -3$ si n impair, $\searrow 5$ si n pair

racines : $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \longrightarrow j$ et $\bar{j}$ si n impair

$\underbrace{\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}_{\text{pas de module } 1\,!}$ si n pair

on cherche donc $p \in \mathbb{N}$ tq. $(n = 2p+1)$

$j^{2p+1} = j$ ou $j^{2p+1} = \bar{j}$

$j^{2p+1} = j \iff j^{2p} = 1 \iff \dfrac{2\pi}{3} \times 2p \in 2\pi\mathbb{Z}$

$\iff \exists k \in \mathbb{N};\ 2p = 3k \iff p \in 3\mathbb{N}$

$j^{2p+1} = \bar{j} \iff j^{2p+2} = 1 \iff \dfrac{2\pi(2p+2)}{3} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{N};\ 2p+2 = 3k$

$\iff p+1 \in 3\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre d'abord :

$\underbrace{X^2+X+1 \mid (X+1)^n - X^n - 1}_{(2)} \iff j$ et $\bar{j}$ sont racines de $(X+1)^n - X^n - 1$

$\Rightarrow)$ Comme $(X+1)^n - X^n - 1 = C_n(X^2+X+1)$

et j et $\bar{j}$ sont racines de X^2+X+1,

j et $\bar{j}$ annulent $(X+1)^n - X^n - 1$.

$\Leftarrow)$ Comme $(X+1)^n - X^n - 1$ a 2 racines distinctes : j et $\bar{j}$, on a, par le résultat précédent

$$X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j}) \mid (X+1)^n - X^n - 1.$$

Ensuite on remarque que

$$(j+1)^n - j^n - 1 = 0 \iff \overline{(j+1)^n - j^n - 1} = 0$$
$$\iff \overline{(j+1)^n} - \overline{j^n} - 1 = 0$$
$$\iff (\overline{j+1})^n - \bar{j}^n - 1 = 0$$
$$\iff (\bar{j}+1)^n - \bar{j}^n - 1 = 0$$

Donc

(2) $\iff$ j est racine de $(X+1)^n - X^n - 1$.

Comme $-j^2 = j+1$,

$$(j+1)^n - j^n - 1 = 0 \iff (-1)^n (j^n)^2 - j^n - 1 = 0$$
$$\iff (-1)^{n+1}(j^n)^2 + j^n + 1 = 0$$
$$\iff j^n \text{ est racine de } \underbrace{(-1)^{n+1}X^2 + X + 1}_{P_n} = 0.$$

Le discriminant Δ_n de P_n est $\Delta_n = 1 - 4(-1)^{n+1}$

Si n est pair, les racines de P_n sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$.

Comme $\left|\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right| \neq 1$ et $|j^n| = 1$, j^n ne peut être racine de P_n.

On a donc

$(\mathcal{D}) \iff$ n est impair et j^n est racine de $X^2 + X + 1 = 0$.

$\iff \exists p \in \mathbb{N}$ t.q. $n = 2p+1$ et $j^{2p+1} \in \{j; \bar{j}\}$.

$\iff \exists p \in \mathbb{N}$; $n = 2p+1$ et $\begin{cases} j^{2p} = 1 \\ \text{ou} \\ j^{2p+2} = 1 \end{cases}$

(car $j\bar{j} = 1$).

$\iff \exists p \in \mathbb{N}$; $n = 2p+1$ et $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} ; \ \frac{2\pi}{3} \times 2p = 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{N} ; \ \frac{2\pi}{3}(2p+2) = 2k\pi \end{cases}$

$\iff \exists p \in \mathbb{N}$; $n = 2p+1$ et $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} ; \ 2p = 3k \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{N} ; \ 2(p+1) = 3k \end{cases}$

$\iff \exists p \in \mathbb{N}$; $n = 2p+1$ et $\begin{cases} \exists q \in \mathbb{N} ; \ p = 3q \\ \text{ou} \\ \exists q \in \mathbb{N} ; \ p + 1 = 3q \end{cases}$

$\iff \exists q \in \mathbb{N} ; n = 6q+1$ ou $\exists q \in \mathbb{N}^* ; n = 6q - 1$

$\iff n \in \left(1 + 6\mathbb{N} \cup -1 + 6\mathbb{N}^* \right)$.

Ex. 3.16 :

Comme $P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$, on a

$P_n' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$.

Donc $P_n'(1) = 0$ et $P_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0$.

Donc 1 est une racine d'ordre $k \geqslant 2$ de P_n.

Donc, par déf., $(X-1)^k \mid P_n$ donc $(X-1)^2 \mid P_n$.

3.17

(1). Par division euclidienne, il existe $(Q_1 ; R_1 ; Q_2 ; R_2) \in \mathbb{R}[X]^4$ t.q.

$$P = (X-a)(X-b)\,Q_1 + R_1 \qquad (*)$$

$$P' = (X-a)(X-b)\,Q_2 + R_2 \qquad (**).$$

avec $\deg R_1 < 2$ et $\deg R_2 < 2$.

Par $(*)$ et le fait que $P(a) = P(b) = 0$,

$R_1(a) = 0$ et $R_2(b) = 0$.

Par le cours, $R_1 = 0$,

Par $(**)$ et le fait que $P'(a) = P'(b) = 0$,

$R_2(a) = 0$ et $R_2(b) = 0$.

Par le cours, $R_2 = 0$.

Donc $(X-a)(X-b)$ divise P et P'.

(2). Soit

$$P = P'Q + R$$

la div. eucli. de P par P'. Par (1),

$$R = P - P'Q = (X-a)(X-b)\left[Q_1 - Q_2 Q\right].$$

Donc $(X-a)(X-b)$ divise R.

(3). (a). $Q' = 144X^3 + 36X^2 - 22X - 2$

$$36x^4+12x^3-11x^2-2x+1 \quad \Big| \; 144x^3+36x^2-22x-2$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{48}$$

$$-\left(36x^4+9x^3-\frac{11}{2}x^2-\frac{x}{2}\right)$$

$$3x^3-\frac{11}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$$

$$-\left(3x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{24}x-\frac{1}{24}\right)$$

$$-\frac{25}{4}x^2-\frac{25}{24}x+\frac{25}{24}=:R \,, \quad R=\frac{25}{24}(-6x^2-x+1)$$

Racines de R :

$$\Delta = 1+4\times 6\times 1 = 25$$

$$r_1=\frac{1+\sqrt{25}}{-2\times 6} \text{ et } r_2=\frac{1-\sqrt{25}}{-2\times 6}$$

$$r_1=-\frac{1}{2} \text{ et } r_2=\frac{1}{3}.$$

On vérifie

$$Q(r_1)=\frac{36}{4\times 4}-\frac{3\times 4}{2\times 4}-\frac{11}{4}+\frac{2}{2}+1=\frac{9}{4}-\frac{6}{4}-\frac{11}{4}+\frac{8}{4}=0.$$

$$Q'(r_1)=-\frac{18\times 8}{8}+\frac{36}{4}+11-2=-18+9+11-2=0.$$

$$Q(r_2)=\frac{4\times 9}{9\times 9}+\frac{3\times 4}{3\times 9}-\frac{11}{9}-\frac{6}{9}+\frac{9}{9}=\frac{4+4-11-6+9}{9}=0$$

$$Q'(r_2)=\frac{9\times 16}{9\times 3}+\frac{4\times 9}{9}-\frac{22}{3}-2=\frac{16+12-22-6}{3}=0.$$

Comme $\deg Q=4$, r_1 et r_2 sont racines au moins doubles de $\underline{Q}$.

Ex. 3.18.

Soit α une racine de P_n. Si α était racine multiple de P_n, on aurait

$$P_n(\alpha) = 0 = P_n'(\alpha) = P_{n-1}(\alpha).$$

$$\hookrightarrow = \frac{\alpha^n}{n!} + P_{n-1}(\alpha).$$

Donc $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ et $\alpha = 0$. Contr. car $P_n(0) = 1$.

Donc les racines de P_n sont toutes simples.

Par le cours, P_n a n racines distinctes. ✓

Ex. 3.19.

Les racines de P sont $e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi+2\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi+4\pi}{3}}$

donc $P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi+2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi+4i\pi}{3}}\right)$.

(cf. cours).

$$Q = X^4 + 1 = X^4 - i^2 = (X^2 - i)(X^2 + i)$$

$$= \left(X^2 - e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(X^2 - e^{\frac{i\pi}{2} + i\pi}\right)$$

$$= \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i3\pi}{4}}\right).$$

Soit $S = X^2 + X + 1$. Les racines sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}$.

Donc $S = (X - j)(X - \bar{j})$. D'où

$R = (X^4 - j)(X^4 - \bar{j})$. On cherche ensuite les racines 4e de j et $\bar{j}$. ...