Ex. 3.20.

On a $P = X^4+3X^3+4X^2+3X+1$

donc $P' = 4X^3+9X^2+8X+3$. D'où

$P(-1) = 1-3+4-3+1=0$

$P'(-1) = -4+9-8+3=0$.

Donc -1 est une racine au moins double de P.

On effectue la div. eucli. de P par $(X+1)^2 = X^2+2X+1$

(dont le reste est 0 car $(X+1)^2 \mid P$):

$$
\begin{array}{r|l}
X^4+3X^3+4X^2+3X+1 & X^2+2X+1 \\
\hline
-(X^4+2X^3+1) & X^2+X+1 \\
X^3+3X^2+3X+1 & \\
-(X^3+2X^2+X) & \\
X^2+2X+1 & \\
-(X^2+2X+1) & \\
0 &
\end{array}
$$

Donc $P=(X+1)^2(X^2+X+1)$

Comme X^2+X+1 est de deg. 2 sans racine réelle ($\Delta=1-4<0$), c'est la fact. de P en irréd. de $\mathbb{R}[X]$.

Comme $X^2+X+1=(X-j)(X-\bar{j})$ avec $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$,

on a $P=(X+1)^2(X-j)(X-\bar{j})$

c'est la fact. de P en irréd. de $\mathbb{C}[X]$.

Ex. 3.19 : (iii)

$$R = X^8 + X^4 + 1.$$

Soit $S = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$.

On a

$$R = (X^4 - j)(X^4 - \bar{j}).$$

On cherche les racines 4 ièmes de j et $\bar{j}$.

$$a_0 = e^{\frac{2i\pi}{3\times 4}} = e^{\frac{i\pi}{6}},\ a_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = ia_0,\ a_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times4} + \frac{4\pi}{4}\right)} = -a_0$$

$$\text{et } a_3 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times4} + \frac{6\pi}{4}\right)} = -a_1 = -ia_0.$$

sont les racines 4 ièmes de j.

$$b_0 = e^{-i\frac{2\pi}{3\times4}},\ b_1 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3\times4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = ib_0,\ b_2 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3\times4} + \frac{4\pi}{4}\right)} = -b_0$$

$$\text{et } b_3 = e^{i\left(\frac{-2\pi}{3\times4} + \frac{6\pi}{4}\right)} = -b_1 = -ib_0$$

sont les racines 4 ièmes de $\bar{j}$.

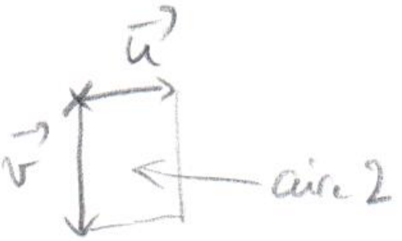
D'où, comme $\deg R = 8$,

$$R = 1 \times (X - a_0)(X - ia_0)(X + a_0)(X + ia_0)$$
$$\times (X - b_0)(X - ib_0)(X + b_0)(X + ib_0).$$

Déterminants

- ils servent à repérer les matrices inversibles.
- il y a un lien entre les dét. 2x2 et les aires.

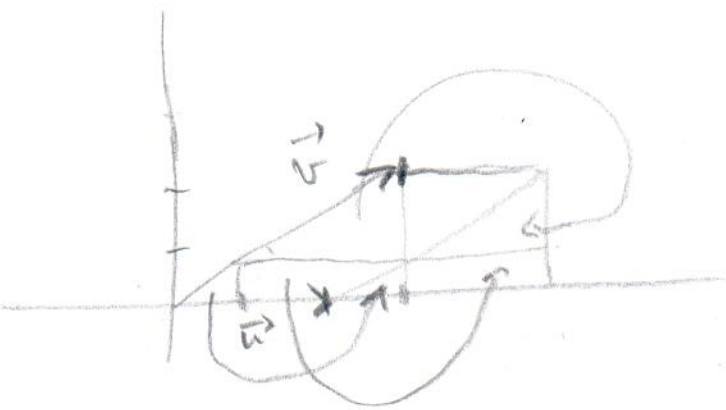
Exemples : $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$



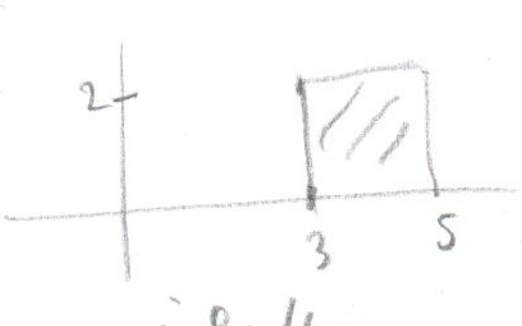
$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{vmatrix} = -2$

donc l'aire $= |\det(\vec{u};\vec{v})|$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. $|\det(\vec{u};\vec{v})| = 4$.



c'est l'aire de



i.e. 4.

Matrice 1x1 :

Si $A=(a)$, $\det A = a$.

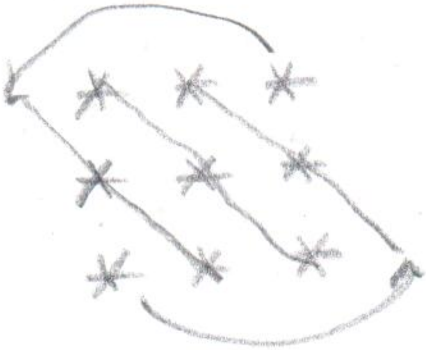
Matrice 2x2 :

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Matrice 3x3 : pour calculer

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

on somme les produits diagonaux



et on retranche la somme des produits diag.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - (3\times5\times7 + 2\times4\times9 + 1\times6\times8).$$

Cas général : $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
A, B matrice $n\times n$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \text{—} & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \text{—} & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \text{—} & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{—} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{—} & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{—} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

idem si λ est en fact. d'une autre col.
——— ligne.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array} \begin{vmatrix} \\ \quad A \quad \\ \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \quad B \quad \\ \\ \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j L_j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Car $B = CA$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ & \ddots & & (0) & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

et $\det C = 1$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$= -1 \times 3 \times 2.$$