TD Anal. 2 

## Notion de voisinage :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $U$ une partie de $\mathbb{R}$.

$U$ est un voisinage de $x$ s'il existe $\delta > 0$ t.q.

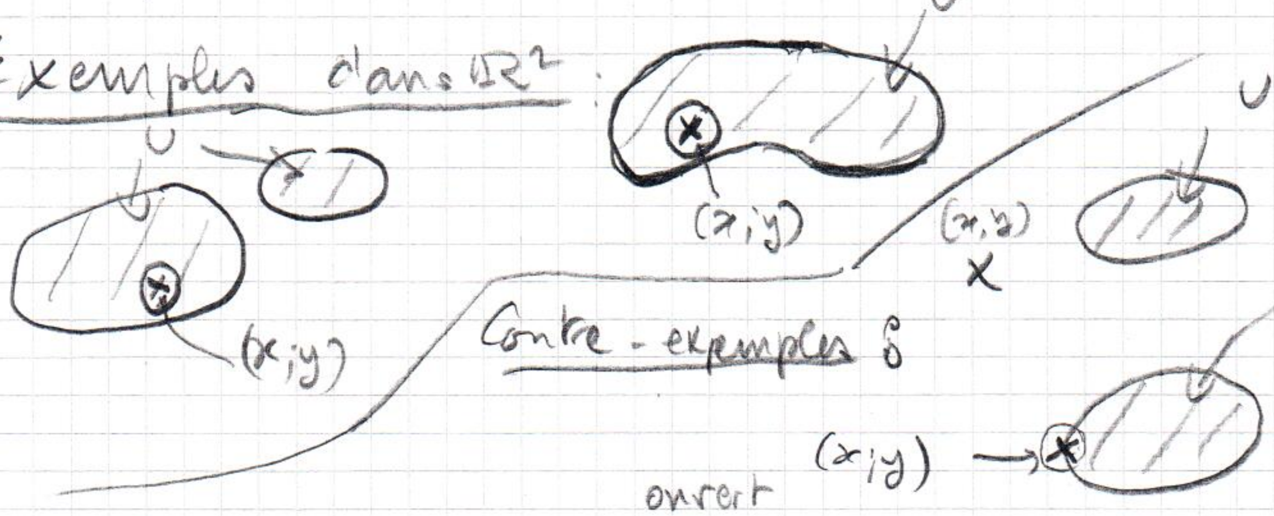
$$]x-\delta ; x+\delta[ \subset U.$$

Pour sentir les dif., je propose de la voir dans le plan $\mathbb{R}^2$ :

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $U$ une partie de $\mathbb{R}^2$.

$U$ est un voisinage de $(x;y)$ s'il existe $\delta > 0$ t.q. le disque ouvert de centre $(x;y)$ et de rayon $\delta$ est inclu dans $U$.

**Exemples dans $\mathbb{R}^2$** :




Rappel : Le disque ouvert de centre $(x;y)$ et de rayon $\delta$ est l'ens. des pts $(x';y')$ de $\mathbb{R}^2$ dont la distance euclidienne à $(x;y)$ est strictement inférieure à $\delta$.

Retour dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on a

$$]x-\delta; x+\delta[ \; = \{x' \in \mathbb{R};\ x-\delta < x' < x+\delta\}$$

$$= \{x' \in \mathbb{R};\ \underbrace{|x-x'|}_{\text{distance de } x \text{ à } x'} < \delta\}.$$

val. abs.

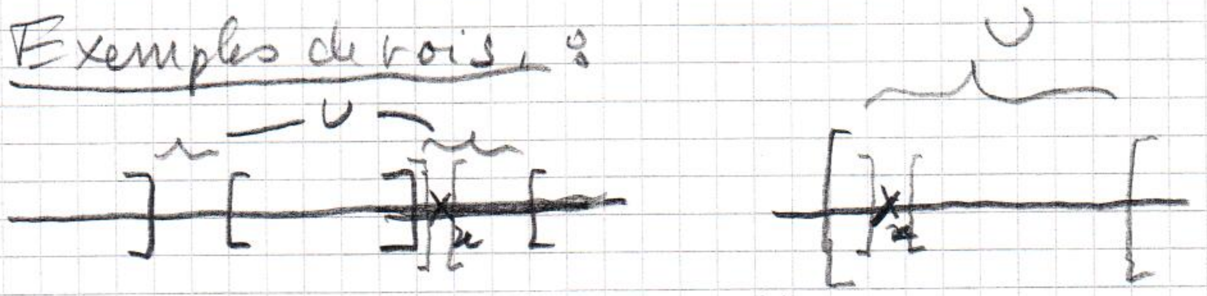
En effet, on a, pour $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x-\delta < x' \\ \text{et} \\ x' < x+\delta \end{cases} \iff \begin{cases} x - x' < \delta \\ \text{et} \\ x' - x < \delta \end{cases} \iff \max(x-x'; x'-x) < \delta \iff |x-x'| < \delta.$$

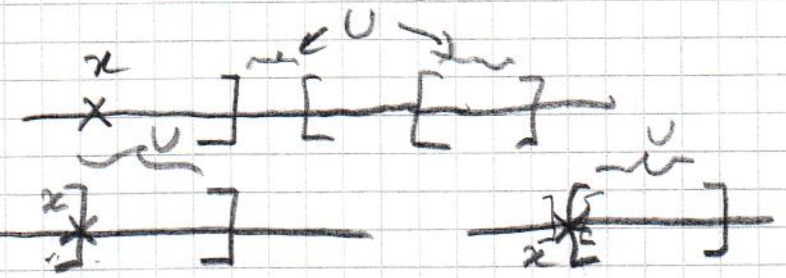
Rappel : $|a| = \max(-a; a)$, pour $a \in \mathbb{R}$

Donc $]x-\delta; x+\delta[$ est l'ens. des $x'$ de $\mathbb{R}$ tq. la distance de $x$ à $x'$ est inf. strict. à $\delta$.

Exemples de vois. :



Contre-ex. :



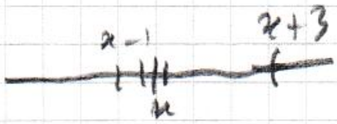
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, $]x-\alpha ; x+\alpha[$ est un vois. de $x$ puisque, pour $\delta = \alpha > 0$,

$$]x-\delta ; x+\delta[ \ \subset \ ]x-\alpha ; x+\alpha[ .$$

On dit que $]x-\alpha ; x+\alpha[$ est un vois. de base de $x$.

$]x-\frac{1}{2} ; x+\frac{1}{2}[$ est un vois. de base de $x$

$]x-1 ; x+3[$ est un vois. de $x$ mais pas un vois. de base de $x$.




Rq. * pour $\alpha > 0$,

$$[x-\alpha ; x+\alpha], \ [x-\alpha ; x+\alpha[, \ ]x-\alpha ; x+\alpha]$$

sont des vois. de $x$ car ils contiennent tous $]x-\frac{\alpha}{2} ; x+\frac{\alpha}{2}[$.


Ce ne sont pas des vois. de base.

* Un vois. de $x$ contient toujours $x$.

* " En agrandissant un vois. de $x$, on obtient un vois. de $x$ " : Si $U$ est un vois. de $x$ et $V$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant $U$ alors $V$ est un vois. de $x$.

En effet, par hyp., il existe $\delta > 0$ ; $]x-\delta ; x+\delta[ \subset U$ comme $U \subset V$, $]x-\delta ; x+\delta[ \subset V$.

* Si $]x-\delta ; x+\delta[ \subset U$, et si

$$V = \{x' \in \mathbb{R} ; \quad x + \frac{\delta}{2} < x' < x + \delta\}$$

on a $\quad V \subset ]x-\delta ; x+\delta[ \subset U$

mais $V$ n'est pas un vois. de $x$


Cependant, si $]x-\delta ; x+\delta[ \subset U$, les intervalles $]x-\alpha ; x+\alpha[$ avec $0 < \alpha < \delta$ sont des vois. de $x$ inclus dans et $\neq U$.


Voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ :

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels!
Ce sont des symboles.

Une partie $U$ de $\mathbb{R}$ est un vois. de $+\infty$ $(-\infty)$ si elle contient un intervalle du type

$$]A ; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} ; \ A < x\}.$$

$$( \ ]-\infty ; A[ = \{x \in \mathbb{R} ; \ x < A\} )$$

Attention : $+\infty$ n'appartient pas à ses voisinages!
Car $+\infty \notin \mathbb{R}$

On a

$$\left\{\begin{array}{l} U \text{ vois. de } +\infty \text{ (resp. } -\infty) \\ \text{et} \\ U \subset V \end{array}\right. \Longrightarrow V \text{ vois. de } +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

Attention, en diminuant un vois. de $\pm\infty$, on peut obtenir un vois. de $\pm\infty$ ou non.

Les ens. $]A;+\infty[$, pour $A$ dans $\mathbb{R}$, sont des vois. de $+\infty$. Ce sont les vois. de <u>base</u> de $+\infty$.

______ $]-\infty;A[$, ______
______ $-\infty$. ______
— $-\infty$.

jecko.perso.math.cnrs.fr

<u>Ex. 1</u> :

| | vois. de 1 | vois. de $+\infty$ |
|---|---|---|
| a) | Oui | Non |
| b) | Non | Non |
| c) | Oui | Oui |
| d) | Oui | Oui |
| e) | Non | Non |
| f) | Non | Oui |

Justifications à suivre.