Ex. 6 (TD3)

Au vu des 3 ~~premières~~ questions, on va montrer par récu. :

$$\mathcal{P}(n) = \left(u_0 \le u_n \le u_{n+1} < v_{n+1} \le v_n \le v_0 \right).$$

ceci donnera la ↘ de v

ceci donnera la 1.

ceci donnera la ↗ de u

ceci donnera la cv. du u.

ceci donnera la cv. de v

1- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(u_0 \le u_n \le u_{n+1} < v_{n+1} \le v_n \le v_0 \right)$.

Comme $u_0 < v_0$, on a

$$u_0 = \frac{u_0+u_0}{2} \le \frac{u_0+v_0}{2} = u_1$$

et $$v_0 = \frac{v_0+2v_0}{3} \geq \frac{u_0+2v_0}{3} = v_1 .$$

De plus

$$v_1 - u_1 = u_0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + v_0\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}u_0 + \frac{1}{6}v_0 > 0 .$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 \le u_n \le u_{n+1} < v_{n+1} \le v_n \le v_0$. Comme

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2} > \frac{u_{n+1}+u_{n+1}}{2} = u_{n+1}$$

et

$$v_{n+2} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} < \frac{v_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = v_{n+1} .$$

De plus

$$v_{n+2} - u_{n+2} = u_{n+1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + v_{n+1}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_{n+1}-u_{n+1}}{6} > 0 .$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

donc $u_n < v_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par $\mathcal{P}(n)$,

$$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} \geq v_n.$$

Donc u est ↗ et v est ↘.

3. Pour tout n, on a, par $\mathcal{P}(n)$

$$u_n \leq v_0 \quad \text{et} \quad v_n \geq u_0.$$

Donc, par le cours, $l = \lim u$ et $l' = \lim v$ existent dans $\mathbb{R}$. Comme $(u_{n+1})_n$ est une s. suite de u et $(v_{n+1})_n$ est une s. suite de v, comme, pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},$$

on a, par passage à la limite $n \to \infty$,

$$l = \frac{l + l'}{2} \quad \text{et} \quad l' = \frac{l + 2l'}{3}$$

Soit $l = l'$.

Rq. : on peut remarquer que $l \in [u_0 ; v_0]$.

Ex. 8 (TD3)

1 – Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (0 < u_n < v_n)$.
Par hyp., $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. Comme $v_n > u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$ (est bien déf.)
et

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} > 0.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2 – Pour $n\in\mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$v_n = \frac{v_n+v_n}{2} > \frac{u_n+v_n}{2} = v_{n+1}$$

et

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2v_n}{u_n+v_n} - 1\right)u_n = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{>0}}{\underbrace{u_n+v_n}_{>0}} \underbrace{u_n}_{>0} > 0.$$

Donc u est $\nearrow$ et v est $\searrow$.

3 – (on pourrait montrer que u et v sont adjacentes en vérifiant que $u_n - v_n \to 0$.)
(On peut aussi procéder comme à l'ex. 6.)

Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$ (q.1), u est majorée par v_0 et v est minorée par u_0. Donc $l = \lim u$ et $l' = \lim v$ existent dans $\mathbb{R}$. Comme $(v_{n+1})_n$ est une s. suite de v et

Comme, pour tout n,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

on a, par passage à la limite $n \to \infty$,

$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$$

Soit $\ell = \ell'$.

4. a). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} v_{n+1} = \frac{2 u_n v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n ;$$

Donc uv est cte. b). Par les opé. sur les limites,

$$\lim uv = \ell \times \ell = \ell^2$$

$$\lim uv = u_0 v_0 \quad \text{(car } uv \text{ est cte)}.$$

D'où $\ell^2 = u_0 v_0 > 0$.

Comme, pour tout n, $u_n > 0$, on a, par passage à la limite $n \to \infty$ dans ces inégalités,

$\ell \geq 0$. D'où $\ell = +\sqrt{u_0 v_0}$.

Limites de fonctions par la définition :

On vérifie que, pour $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to 1} x = 1 \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to -1} f_c = c \; ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_c = c, \quad \text{où } f_c : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto c \end{array}.$$

$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$: Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta = \varepsilon > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - 1| < \delta$, on a

$$|x - 1| < \delta = \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$: Soit $M > 0$. On choisit $A = M$.

Pour $x \geq A$, on a $x \geq M$.

$\lim\limits_{x \to -1} c = c$: Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta = 10^{2021}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - (-1)| < \delta$, on a

$$|f_c(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_c = c$: Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = -10^{57}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$, on a

$$|f_c(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$