Ex.2 (TD3).

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$: On montre

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists A > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^*, \left(x > A \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon\right)$.

(Pour $\varepsilon > 0$ et $x > 0$, $\left(\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon} < x\right)$
On choisit $A = \frac{1}{\varepsilon}$.)

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ avec $x > A$, on a $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$ donc $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$: On montre

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^*, \left(x > A \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ avec $x > A$, on a $x^2 > A^2$ donc $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{A^2} = \varepsilon$ d'où $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$: On montre

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^+, \left(|x| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, On choisit $\delta = \varepsilon^2 > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ avec $|x| < \delta$, on a, $0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ donc $|\sqrt{x}| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$: On montre

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^+, \left(|x - 4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon\right)$.

(Soit $\varepsilon > 0$ et $x \geq 0$. On a, comme $\sqrt{x}+2>0$,

$$|\sqrt{x}-2| < \varepsilon \iff |\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2) < \varepsilon(\sqrt{x}+2)$$
$$\iff |x-4| < \varepsilon(\sqrt{x}+2)$$

On impose $\delta \in]0;1]$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ avec $|x-4|<1$ on a $x>1$ et $\sqrt{x}+2>3$. Donc, si $|x-4|<3\varepsilon$, $|x-4|<\varepsilon(\sqrt{x}+2)$.

On choisit $\delta = \min(1; 3\varepsilon) \in]0;1]$.)

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $\delta = \min(1; 3\varepsilon)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ avec $|x-4|<\delta$. On a

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|\sqrt{x}-2|(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}.$$

Or, comme $\delta \leq 1$, $x > 3 > 1$ donc $\sqrt{x}+2 > 3$ et $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{3}$ donc

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{|x-4|}{3} < \frac{\delta}{3} \leq \varepsilon.$$

<u>Ex. 3</u> :

3.1.

(On devine que $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Mais on peut utiliser le fait que sinus est bornée. On devine que la limite cherchée est 0.)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|. \quad (*)$$

Or $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ $((**))$ donc par le th. des gendarmes $\lim x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Justification de $\lim_{x \to 0} |x| = 0$;
Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta = \varepsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \delta$ on a $|x| < \varepsilon$.

<u>Rq.</u> : $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Si $\ell = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existait alors, par <u>le cours</u>, pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim u = 0$ on aurait $\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \ell$.

Soit $u = \left(\frac{1}{2(n+1)\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin\left((2n+1)\pi\right) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Comme $\lim u = 0$, on a donc $\ell = 0$.

Soit $u = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Comme $\lim u = 0$, $\ell = 1$. <u>Contra</u>.

3.2. Pour $x \neq 0$, $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

Pour $x > 0$, $1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

Pour $x < 0$, $1 - x > x E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$

On va appliquer le Th. des gendarmes

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left| x E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right| = |x| \times \left| E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right|.$$

Or, pour $x \neq 0$,

$$E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

donc $\left| E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right| \leq 1$

d'où

$$\left| x\, E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 .$$

Donc, par le Th. des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

3.3. Soit $f : \left]-1;+\infty\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

0 est adhérent à $\mathcal{D}_f = \left]-1;+\infty\right[\setminus\{0\}$.

Comme $\ln$ est dérivable en 1 de dérivée $1/1 = 1$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{x} = 1 .$$ Comme exp est continue en 1, on a, par composition

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e .$$

Ex. 4 :

4.1. Soit $a > 0$ et $(x;y) \in [a;+\infty[^2$. On a

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{x \cdot y} .$$

Comme $x \geq a > 0$, $y \geq a > 0$ et $|x-y| \geq 0$, on a

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leq \frac{|x-y|}{a^2}.$$

4.2. Soit $\varepsilon>0$.

on veut utiliser 4.1 avec $a=\frac{x_0}{2}$.
on cherche α tq. $\alpha \leq \frac{x_0}{2}$
on a aussi besoin de $\frac{\delta}{a^2} \leq \varepsilon$.

Soit $x_0>0$. Soit $\varepsilon>0$. On choisit $\alpha=\min\left(\frac{x_0}{2}; \varepsilon\left(\frac{x_0}{2}\right)^2\right)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tq. $|x-x_0|<\alpha$. Comme $\alpha \leq \frac{x_0}{2}$,
$x>\frac{x_0}{2}$ et $x_0>\frac{x_0}{2}$ donc, par 4.1,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| \leq |x-x_0| \times \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 < \alpha \times \left(\frac{2}{x_0}\right)^2 \leq \varepsilon.$$

4.3. 4.2. signifie $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$!

<u>Rq.</u>: Soit $a>0$. Montrer la prop. suivante :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 ; \forall (x;y) \in [a;+\infty[^2,$$
$$|x-y|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $\delta=a^2\varepsilon$. Soit $(x;y)\in[a;+\infty[^2$ avec $|x-y|<\delta$. On a, par 4.1,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y| < \frac{\delta}{a^2}=\varepsilon$$