Ex. 5.

Par hyp., on a

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0; \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon)$. (*)

Par (*) avec $\varepsilon = 1$, il existe $A > 0$ tq., pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < 1).$$

Donc, pour $x > A$, on a

$$0 = 1 - 1 < f(x) < 1 + 1.$$

Donc $0 \notin f(]A; +\infty[)$. Soit $a > A$. Comme

$f([a; +\infty[) \subset f(]A; +\infty[)$, $0 \notin f([a; +\infty[)$.

Ex. 6.

a) $\Rightarrow$ b) : On suppose a) vraie.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après a), il existe $y \in D$ tq.

$|y - x| < \varepsilon$ donc $|y - x| \leq \varepsilon$. On a montré b).

b) $\Rightarrow$ c) : On suppose b) vraie et on construit une suite u par récurrence. Par b) avec $\varepsilon = 1$, il existe $u_0 \in D$ tq. $|u_0 - x| \leq 1$. Supposons construits $u_0, u_1, \dots, u_n$ tq., pour $p \in \mathbb{N} \cap [0; n]$, $|u_p - x| \leq \frac{1}{p+1}$.

Par b) avec $\varepsilon = \frac{1}{n+2}$, il existe $u_{n+1} \in D$ tq. $|u_{n+1} - x| < \frac{1}{(n+1)+1}$.

Par le th. de récu., on a ainsi construit une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tq., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x| \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim u = x$, par le th. des gendarmes.

On a montré c).

c) $\Rightarrow$ a) : On suppose c vraie.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - x| < \varepsilon.$$

Donc $|u_N - x| < \varepsilon$ avec $u_N \in D$, par hyp.

Donc a) est vraie.

Ex. 1 :

a). $\forall A > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in D_f,$

$$(|x-3| < \delta \Rightarrow f(x) > A)$$

Rq. : cette proposition est vraie pour $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2}$, pour $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ si $x > 3$, $-\ln(3-x)$ si $x < 3$,

mais pas pour $h : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-3}$.

b). $\forall A > 0, \exists B > 0 ; \forall x \in D_f,$

$$x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

Ex. 1 (TD5).

f_1 est définie sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R} \ni x \longmapsto 1+x^2 \in \mathbb{R}$ est une fonct. poly.,
elle est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est
conti., f_1 est conti. par composition.

f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ car, pour $x \in \mathbb{R}$,
$1+x^2 \geqslant 1$ donc $1+x^2$ appartient au domaine de déf. de ln.
Comme $x \overset{\varphi}{\mapsto} 1+x^2$ est conti, et comme ln est conti.
sur $\mathbb{R}^{+*} \supset \varphi(\mathbb{R})$, f_2 est conti. par composition.

f_3 est définie sur $D_3 = [-1;1]$ car, pour $|x| \leq 1$,
$x^2 \leq 1$ et $1-x^2 \geqslant 0$ donc $1-x^2$ appartient au domaine
de déf. de $\sqrt{.}$ (qui est $\mathbb{R}^+$).
D_3 est-il le plus sous-ens. de $\mathbb{R}$ sur lequel f_3 est déf. ?
Oui car si $f_3(x)$ est défini pour un $x \in \mathbb{R}$ alors
nécessairement $1-x^2 \geqslant 0$ donc $|x| \leq 1$ d'où $x \in D_3$.
Comme $x \overset{\psi}{\mapsto} 1-x^2$ est conti. (fonct. poly.), comme
$\sqrt{.}$ est conti. sur $\mathbb{R}^+ \supset \psi(\mathbb{R})$, f_3 est conti. par composition.

f_4 est définie sur $D_4 = [1;+\infty[$ car, pour $x \geq 1$, $\ln x$
est déf. et $\ln x \geqslant 0$ donc $\sqrt{\ln x}$ est bien déf.
Si $\sqrt{\ln x}$ est bien déf. alors néce. $\ln x$ est bien déf. et est ≥ 0
donc nécessairement, $x > 0$ et $x \geq 1$ (car ln est st. ↗ et $\ln 1 = 0$).
D'où $x \in D_4$.

Encore, par composition, f_4 est conti.

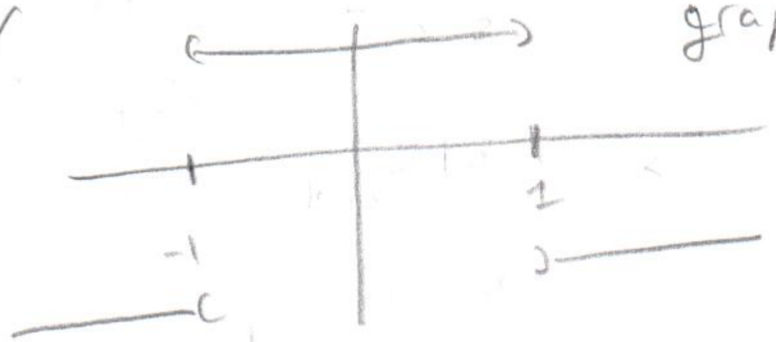
<u>Rq</u> : Soit $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

sgn est conti. sur $\mathbb{R}^*$ (car constante !)

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \operatorname{sgn}(1-x^2).$$

Domaine de conti. de g ?

(graphe de g



)

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1-x^2$.

On a
$$\varphi(x) = 0 \iff 1 = x^2 \iff x \in \{-1 ; 1\}.$$

Donc $\varphi(D) = \mathbb{R}^*$, Comme φ est conti. sur D,

Comme sgn est conti. sur $\mathbb{R}^* \supset \varphi(D)$, g est conti.

sur D par composition.

<u>Discontinuité en 1</u> : On a, pour $x > 1$, $g(x) = -1 \underset{\substack{x \to 1 \\ >}}{\longrightarrow} -1$

pour $0 < x < 1$, $g(x) = 1 \underset{\substack{x \to 1 \\ <}}{\longrightarrow} 1$.

Comme $\lim_{1^-} g \neq \lim_{1^+} g$, g n'est pas conti. en 1.

<u>Discontinuité en -1</u> : on a, pour $0 > x > -1$, $g(x) = 1 \underset{\substack{x \to -1 \\ >}}{\longrightarrow} 1$

et pour $x < -1$, $g(x) = -1 \underset{\substack{x \to -1 \\ <}}{\longrightarrow} -1$. Comme $\lim_{(-1)^+} g \neq \lim_{(-1)^-} g$, g n'est pas conti. en -1.

<u>Rq</u> : Pour $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D_f}$,

$$\lim_{a^+} f = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f := \lim_{x \to a} f_{|]a;+\infty[}$$

quand <u>elle existe</u>.

Ici $f_{|]a;+\infty[} : D_f \cap]a;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$.

Attention, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut avoir $f_{|[a;+\infty[}$ et $f_{|]-\infty;a[}$ continues sans que f soit conti. sur $\mathbb{R}$,

voir la fnct. sgn précédente.

<u>Rappel du cours</u> : Pour $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$.

f est conti. en a $\iff$ $\lim_a f$ existe dans $\mathbb{R}$

(lorsque $\lim_a f$ existe dans $\mathbb{R}$ c'est forcément $f(a)$).

$\lim_a f$ existe $\iff$ $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ existent et sont égales à <u>$f(a)$</u>.

Dans le cas où $f_{|]a;+\infty[}$ (ou bien $f_{|]-\infty;a[}$) n'a pas de sens car $D_f \cap]a;+\infty[= \emptyset$ (resp. $D_f \cap]-\infty;a[= \emptyset$)

alors

$\lim_a f$ existe $\iff$ $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$

(resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$)

2.1. (on étudie $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{0^-} f$.)

Pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{\underbrace{x^2 + 2x + 3}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 3}}{\underbrace{x^3 + 1}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq 0}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{1} = 3$$

par les opé. sur les limites.

<u>Alternative</u> : Soit $g :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1}$.

Comme

$$\frac{\underbrace{x^2 + 2x + 3}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 3}}{\underbrace{x^3 + 1}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq 0}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{1} = 3$$

par les opé. sur les limites, g est conti. en 3,

Comme $f_{|]0;+\infty[} = g_{|]0;+\infty[}$,

$$\lim_{0^+} f := \lim_{0} f_{|]0;+\infty[} = \lim_{0} g_{|]0;+\infty[} = \lim_{0} g = g(0)$$

donc $\lim_{0^+} f$ existe et vaut $g(0) = 3$.

69

Pour $x<0$, on a

$$f(x) = \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et comme $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$,

on a, par composition,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 1$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{3x}-1}{x}$.

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 3$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3 = f(0)$,

f est conti. en 0.

2.2. (on étudie $\lim\limits_{1^+} g$ et $\lim\limits_{1^-} g$).

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on a $\dfrac{(x+1) \xrightarrow[x \to 1]{} 2}{(2x-1) \xrightarrow[x \to 1]{} 1 \neq 0} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{2}{1} = 2$

Comme, pour $x > 1$, $g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$, $\lim\limits_{1^+} g = 2 = g(1)$

Donc g est conti. à dte en 1.

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} \ln'(1) = 1$

donc, comme $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$ pour $0<x<1$, $\lim\limits_{1^-} g = 1 \neq g(1)$.

Donc g n'est pas conti. en 1 (de plus $\lim\limits_{x \to 1} g$ n'existe pas).