Ex. 3 (TD5).

On supp. $a \neq 0$. On a, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sin(ax)}{x} = \underbrace{\frac{\sin(ax)}{ax}}_{\substack{\longrightarrow \\ x \to 0}\ \sin'(0) = 1 \text{ car } \sin(0)=0} \times a \xrightarrow[x \neq 0]{x \to 0} a.$$

Pour $a = 0$, on a aussi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin(ax)}{x} = 0 = a$.

Donc, dans tous les cas, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = a$.

Par ailleurs, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \underbrace{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}_{\substack{\longrightarrow \\ x \to 0,\ x \neq 0}\ \ln'(1) = 1} \times \frac{3}{2} \xrightarrow[x \neq 0]{x \to 0} \frac{3}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \frac{3}{2}$.

On a donc

f est prol. par conti. en 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$

ssi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$

ssi $a = \frac{3}{2}$.

Pour $a = 3/2$, $\tilde{f} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

est le prol. par conti. de f en 0.

Ex. 4 (TD5). 71

4.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$f(x)$ est déf. $\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et } \sqrt{1+x} \text{ est déf.} \\ \text{et } \sqrt{1-x} \text{ est déf.} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et } x \geq -1 \\ \text{et } x \leq 1 \end{cases} \iff x \in [-1;1] \setminus \{0\}.$

Donc $D = [-1;1] \setminus \{0\}$ est le plus gd. sous-ens. de $\mathbb{R}$ sur lequel f est définie.

4.2. (– on peut utiliser les développements limités)
– on utilise une astuce classique

Pour $x \in D$, on a $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 0$ et

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} \xrightarrow{x \to 0} 1 \in \mathbb{R},$$

par les opé. sur les limites.

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x} \to 2 \neq 0$, $x \to 0$, $\sqrt{1+x} \to 1$, $\sqrt{1+x} \to 1$

car $\sqrt{\cdot}$ est conti. en 1

Donc f se prolonge par conti. en 0.
Soit $\tilde{f}$ le prolongement. $\tilde{f}$ est conti. en 0.
Pour $a \in D$, $\tilde{f}$ coïncide avec f près de a.
f est conti. en a par quotient, somme et composition.
Donc $\tilde{f}$ est conti. sur $[-1;1]$.

Ex 5 (TD5)

5.1 et 5.2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Comme $E_{|[E(a);E(a)+1[}$ est constante, elle est conti. en a donc E est conti. en a.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a, pour $x \in [n;n+1[$, $E(x) = n$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} E(x) = n = E(n)$.

E est conti. à dte en n. On a, pour $x \in]n-1;n[$, $E(x) = n-1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ <}} E(x) = n-1 \neq n = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} E(x)$.

E n'est pas conti. en n.

5.3. E n'est pas conti. sur $[0;1]$ ni sur $]0;1]$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} E(x) = 0 \neq 1 = E(1)$.

D'après ce qui précède, E est conti. sur $]0;1[$ (cas où $a = \frac{1}{2}$). E n'est pas conti. sur $[0;1[$ car E n'est pas conti. en 0 (cf. 5.1).

5.4. $E_{|[0;1]}$ n'est pas conti. car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} E_{|[0;1]}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} E(x) = 0 \neq 1 = E_{|[0;1]}(1)$.

De même, $E_{|]0;1]}$ n'est pas conti.

Comme $E_{|[0;1[}$ et $E_{|]0;1[}$ sont constantes, elles sont continues.