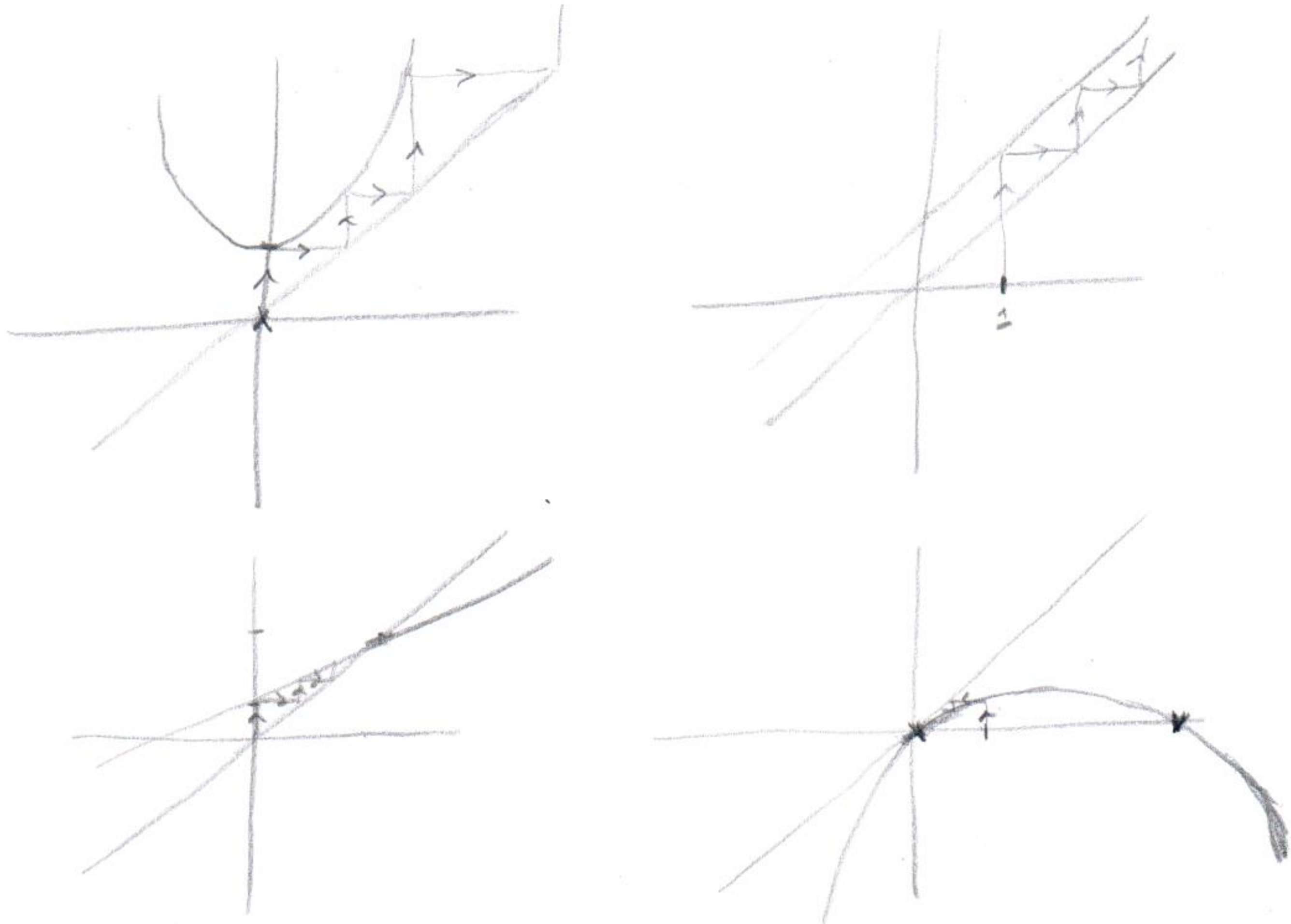
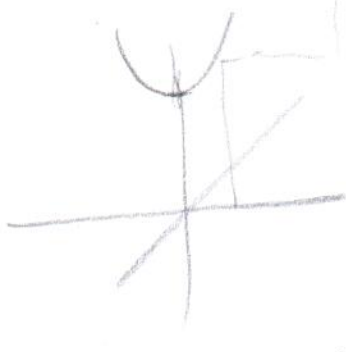
Ex. 1. (TD6).



Ex. 2.

(i).



(On devine que $\lim u_n = +\infty$.

$u_n \geqslant 2^n$ pour $n \geqslant 1$ par récu.

puis $\lim 2^n = +\infty$ et gendarmes.)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n \geqslant 2^n)$.

Comme $u_1 = u_0^2 + 2 \geqslant 2$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2 \geqslant u_n^2 \geqslant (2^n)^2 = 2^{2n} \geqslant 2^{n+1}$$

car $n \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \geq 2^n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty.$$

Donc $\lim u = +\infty$ par le Th. des gendarmes.

(ii) On admet que la suite est bien déf.

on devine que u cv. en $\nearrow$ vers l'unique pt. fixe de $-1 \leq x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \text{et} \\ \sqrt{1+x} = x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ \sqrt{1+x} = x \end{cases} \iff \begin{cases} 1+x = x^2 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\Delta = 1+4 =$ $\qquad$ $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$u_{n+1} - \alpha = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\alpha} \,!$$

$$= \frac{1+u_n-(1+\alpha)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\alpha}}$$

Soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. On a $\alpha^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= 1+\alpha$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - \alpha = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\alpha} = \frac{1+u_n-(1+\alpha)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\alpha}}$$

Donc

$$|u_{n+1} - \alpha| = \frac{|u_n-\alpha|}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\alpha}} \leqslant \frac{|u_n-\alpha|}{\sqrt{1+\alpha}} = \frac{|u_n-\alpha|}{\alpha}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(|u_n - \alpha| \leq \frac{|u_0 - \alpha|}{\alpha^n} \right)$. [75].

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha| \frac{1}{\alpha} \overset{HR.}{\leq} \frac{1}{\alpha} \frac{|u_0 - \alpha|}{\alpha^n} = \frac{|u_0 - \alpha|}{\alpha^{n+1}},$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de récu, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha^n} = 0$. Comme, pour tout n,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{|u_0 - \alpha|}{\alpha^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\lim u = \alpha$ par le Th. des gendarmes.

(iii) (on devine que $\lim u = 0$.
on peut utiliser : $\forall x$, $|\sin(x)| \leq |x|$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq |x|$, avec égalité ssi $x = 0$. $(*)$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| = |\sin(u_n)| \leq |u_n|$.

Donc $|u|$ est $\searrow$. Comme elle est minorée par 0, elle cv. vers un $l \geq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| = |\sin(u_n)| = |\sin(|u_n|)| \quad \left(\text{Car Sinus est impaire}\right).$$

Comme $\sin$ et $|\cdot|$ sont contin, on peut passer à la limite $n \to \infty$ dans les égalités. On obtient :

$$l = |\sin(l)|.$$

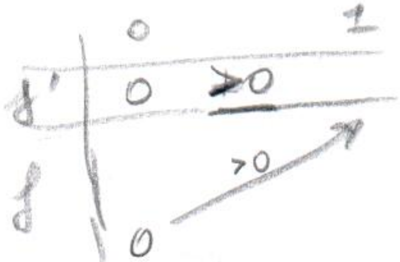
Par $(*)$, $l = 0$.

Preuve de (*) :

Pour $|x|>1$, on a $|\sin(x)| \leq 1 < |x|$.

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - \sin(x)$. f est dérivable et

pour $x \in [0;1]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$.



f est str. $\nearrow$, nulle en 0 et str. >0 ailleurs.

Donc, pour $x \in [0;1]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$

car $1 \leq \frac{\pi}{2}$ égalité ssi $x=0$.

Comme sinus est impaire, on a aussi, pour $x \in [-1;0[$

$$x < \sin(x) \leq 0,$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, avec égalité ssi $x=0$.

(iv) On admet que la suite est bien définie.

(on devine que u cv. vers le seul pt. fixe)

✓

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$, $x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$f(x) = x \iff x + \frac{1}{x} = 2x \iff \frac{1}{x} = x \iff 1 = x^2 \iff x = 1,$$

(car $x>0$)