Preuve de (*) :

Pour $|x|>1$, on a $|\sin(x)| \leq 1 < |x|$.

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - \sin(x)$. f est dérivable et

pour $x \in [0;1]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$.

	0		1
f'	0	>0	
f	0	$\nearrow$	>0

f est str. $\nearrow$, nulle en 0 et str. >0 ailleurs.

Donc, pour $x \in [0;1]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$

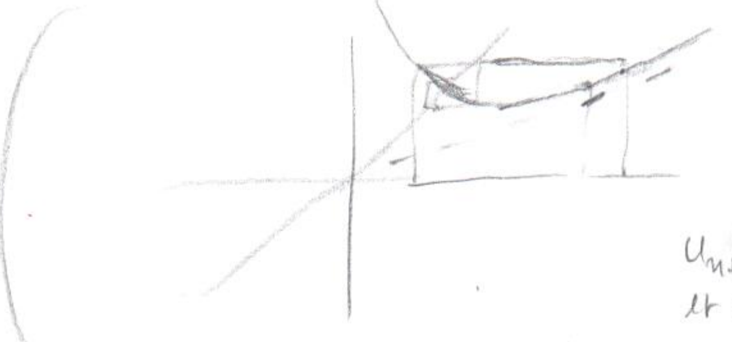
car $1 \leq \frac{\pi}{2}$ — égalité ssi $x=0$.

Comme sinus est impaire, on a aussi, pour $x \in [-1;0[$

$x < \sin(x) \leq 0$.

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, avec égalité ssi $x=0$.

(iv) On admet que la suite est bien définie.



(On devine que u cv. vers le pt. fixe de la fonct.

$u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n}$ donc $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{u_n - 1}{2}$

et $u_n \geq 1$ si $n \geq 1$)

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$, $x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$f(x) = x \iff x + \frac{1}{x} = 2x \iff \frac{1}{x} = x \iff 1 = x^2 \iff x = 1$.

(car $x>0$)

De plus, f est C^1 et, pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. $\boxed{77}$

Donc

	0		1	
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$
f	$\Vert$	$\searrow$	$f(1)=1$	$\nearrow$

en particulier : $f \geqslant 1$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n = f(u_{n-1}) \geq 1$ et $u_{n+1}=f(u_n)\geq 1$.
De plus,

$$u_{n+1}-1 = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)-1 = \frac{u_n^2+1-2u_n}{2u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2u_n}$$

donc

$$0 \leq u_{n+1}-1 \leq \frac{u_n-1}{u_n}\,\frac{u_n-1}{2} \leqslant \frac{u_n-1}{2}. \quad (*)$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(0\leq u_n-1\leq \frac{u_1-1}{2^{n-1}}\right)$.

$\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}^*$.

On a, par $(*)$,

$$0\leq u_{n+1}-1 \leq \frac{u_n-1}{2} \overset{H.R.}{\leq} \frac{1}{2}\times\frac{u_1-1}{2^{n-1}} = \frac{u_1-1}{2^{(n+1)-1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq u_n-1 \leq \frac{u_1-1}{2}\times \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Par le Th des gendarmes, $\lim u = 1$.

Ex. 3 (TD 6).

1.a. On a, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } f(x) = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x > 0 \text{ et } e^{\frac{2-x}{4}} = 1 \end{cases}.$$

Comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est bij., on a

$$f(x) = x \iff (x = 0) \text{ ou } \left(x > 0 \text{ et } \frac{2-x}{4} = 0\right)$$

$$\iff (x = 0) \text{ ou } (x = 2).$$

f a donc 2 pts fixes : 0 et 2.

b. f est C^1 par produit et composition.

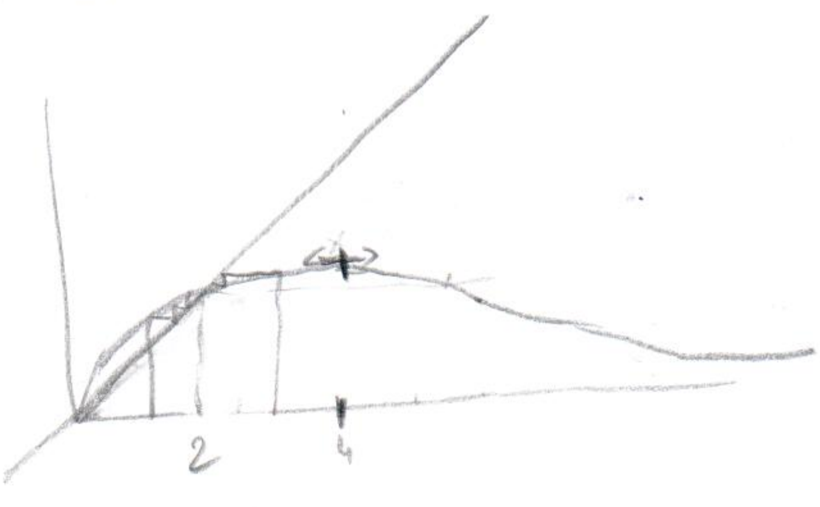
Pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = e^{\frac{2-x}{4}} + x e^{\frac{2-x}{4}} \times \left(\frac{-1}{4}\right) = e^{\frac{2-x}{4}}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

x	0		4	α	
f'		+	0	−	
f	0 ↗		$\frac{4}{\sqrt{e}}$	2	↘ 0

Pour $x \geq 0$,
$f(x) = e^{2/4}\, 4 \times \frac{x}{4} e^{-x/4}$
donc par composition et croissance comparée $\lim_{+\infty} f = 0$.

2.



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1})$ donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 4.$$

3- Si $u_0 = 0$, on vérifie par récu. que u est cte égale à 0.
Si $u_0 = 2$, ——————————————————————— 2.
Si $u_0 = \alpha$, ——————————————— u stationne à 2
à partir du rang 1.

Cas : $0 < u_0 < 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (2 > u_{n+1} > u_n)$.
Comme $\frac{2-u_0}{4} > 0$, $e^{\frac{2-u_0}{4}} > 1$ et $u_1 = u_0 e^{\frac{2-u_0}{4}} > u_0$.
De plus, f est str. ↗ sur $[0;2]$ donc $u_1 = f(u_0) < f(2) = 2$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a :
$0 < u_n < 2$ et f str. ↗ sur $[0;2]$, $u_{n+1} = f(u_n) < f(2) = 2$.
De plus, $\frac{2-u_n}{4} > 0$ donc $u_{n+1} = u_n e^{\frac{2-u_n}{4}} > u_n$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{R}$ et, par passage à la limite dans les inég.

$$2 > u_n > u_0$$

on obtient
$$2 \geq \ell \geq u_0 > 0.$$

Comme f est conti, on a aussi, par passage à la limite dans les égalités $u_{n+1} = f(u_n)$, $\ell = f(\ell)$

D'où $\ell = 2$.

Cas : $2 < u_0 < \alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$\mathcal{P}(n) = (2 < u_{n+1} < u_n < 4)$

Comme $2 < u_0 < \alpha$, $u_1 \in]2; \frac{4}{\sqrt{e}}]$.

Comme f est str. $\nearrow$ sur $]2; \frac{4}{\sqrt{e}}]$, $2 = f(2) < u_2$

et $u_2 = u_1 e^{\frac{2-u_1}{4}} < u_1 \leq \frac{4}{\sqrt{e}} < 4$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie, pour un $n \geq 1$.

On a, comme f est str. $\nearrow$ sur $[2; 4]$, on a

$2 = f(2) < u_{n+1}$

et $u_{n+1} = u_n e^{\frac{2-u_n}{4}} < u_n < 4$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\ell = \lim u$ existe dans $[2; u_0]$.

Comme $\underset{\ell}{u_{n+1}} = f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ car f est conti.

on en déduit que $\ell = 2$.

Cas : $u_0 > \alpha$. On a $u_1 \in]0; 2[$.

En reprenant les arguments du cas $u_0 \in]0; 2[$, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < u_{n+1} < u_n$

que $\ell = \lim u$ existe et vaut 2.

EX.5 (TD6) :

1 _ f est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$$

donc

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

2 _ a _ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $\theta_n \in]0;1[$ tel que :

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(u_n) - f(0) = u_n f'(\theta_n u_n)$$

donc

$$|u_{n+1}| \leq |u_n| \, |f'(\theta_n u_n)| \leq \frac{1}{2} |u_n|$$

par 1,

b _ Pour $n \in \mathbb{N}$, Soit $\mathcal{P}(n) = \left(|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n} \right)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n| \overset{H.R.}{\leq} \frac{1}{2} \frac{|u_0|}{2^n} = \frac{|u_0|}{2^{n+1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n. c) Donc, pour tout n

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Donc $\lim u = 0$ par le Th. des gendarmes.