Préparer les exercices de la liste supplémentaires : 1 ; 16 et 17.

Ex. 1. (TD 7).

1.1. (on ne sait pas trouver les racines d'un poly. de deg. ≥ 5.)

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{17} - x^{11} - 1. \end{array}$

f est conti.

Comme, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \underbrace{x^{17}}_{\substack{\downarrow x \to \pm\infty \\ \pm\infty}} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{x^6}}_{\substack{\downarrow x \to \pm\infty \\ 0}} - \underbrace{\frac{1}{x^{17}}}_{\substack{\downarrow x \to \pm\infty \\ 0}} \right)$$

$\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty.$

Donc il existe $A > 0$, $B > 0$ t.q.

$x > A \Rightarrow f(x) > 0,$

$x < -B \Rightarrow f(x) < 0.$

Donc $f(A+1) > 0 > f(-B-1).$

Par le th. des valeurs intermédiaires, f s'annule entre $-B-1$ et $A+1$.

1.2. Soit $P = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k X^k$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_{2p+1} \neq 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{2p+1} a_k x^k$.

f est conti.

Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{x^{2p+1}}_{\xrightarrow[x \to \sigma\infty]{} \sigma\infty} \times \underbrace{\left(a_{2p+1} + \sum_{k=0}^{2p} a_k \underbrace{\frac{1}{x^{2p-k+1}}}_{\xrightarrow[x\to\sigma\infty]{} 0}\right)}_{\xrightarrow[x\to\sigma\infty]{} a_{2p+1}}$$

$\sigma \in \{-1;1\}$

$\tau =$ signe de a_{2p+1}

Donc $\lim_{\sigma\infty} f = (\sigma\tau)\infty$.

Donc il existe $A_\sigma > 0$ t.q.

$$\sigma x > A_\sigma \Rightarrow \tau f(x) > 0$$

Donc $\tau f(\sigma(A_\sigma+1)) > 0$

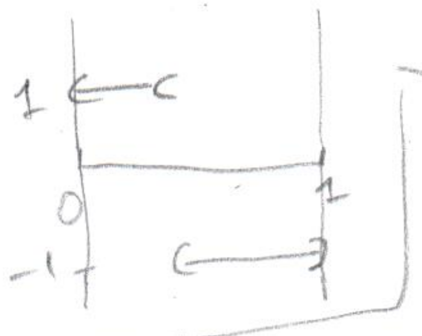
Par le th. des val. interm. f s'annule entre $-(A_{-1}+1)$ et (A_1+1).

Ex. 2 : Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$. conti.

Comme $f(1) \leq 1$, $g(1) \geq 0$. Comme $f(0) \geq 0$, $g(0) \leq 0$.
Par le th. des val. int., g s'annule. Donc f a un pt. fixe.

Ex. 4.

4.1.



4.2. Soit $x \in]0;1]$.
Par hyp. $f(x) \in \{-1;1\}$ et $f(0) \in \{-1;1\}$. Supp. $f(0) \neq f(x)$.

Comme f est conti., f s'annule, par le Th. des val. interm., en un certain $y \in]0;x[$. Donc $0 = f(y)^2 = 1$. Contr. D'où $f(x) = f(0)$, pour tout $x \in]0;1]$. Donc f est cte égale à $f(0) \in \{-1;1\}$.

4.3. 4.2. est valable pour $[0;1]$ remplacé par tout int. I de long. >0.

Soit I un int. de $\mathbb{R}$ de long. $\underline{>0}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ conti. tq.

$$\forall x \in I, \quad f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0.$$

Par hyp. g ne s'annule pas donc f/g est bien déf. et conti. (cf. cours). De plus,

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{f}{g}(x)\right)^2 = 1.$$

Par 4.2. $\frac{f}{g}$ est cte égale à -1 ou 1

donc $f = g$ ou $f = -g$.

Ex. 5

Supposons $l = \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Alors, pour toute suite u tendant vers $+\infty$, $\lim_{n \to \infty} \sin(u_n) = l$ par composition.

Soit $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{array}$, $\lim u = +\infty$

Soit $v : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto 2n\pi \end{array}$, $\lim v = +\infty$.

Pour tout n, $\sin(u_n) = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$
$\sin(v_n) = 0 \longrightarrow 0$

donc $0 = l = 1$. Contr.
Donc $\lim_{+\infty} \sin$ n'existe pas.

5.1.
$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 ; \forall A > 0 ; \exists x \in \mathbb{R} ;$
$(x > A$ et $|\sin(x) - l| > \varepsilon)$.

5.2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $|\sin| \leq 1$,
$[-1;1] \supset f([A;+\infty[)$.
Soit $N = E\left(\frac{|A|}{\pi}\right) + 1$. On a $N\pi > A$.
Donc $[N\pi, (N+2)\pi] \subset [A, +\infty[$ et
$[-1;1] = \sin([N\pi ; (N+2)\pi]) \subset f([A ; +\infty[)$
D'où $f([A;+\infty[) = [-1;1]$.