Supposons $l = \lim_{+\infty} f$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $l = \pm\infty$, $|\sin|$ n'est pas bornée. Contr.

Donc $l \in \mathbb{R}$. Si $l = 1$, alors il existe $A > 0$ t.q.

$$x > A \Rightarrow |\sin(x) - 1| < 2.$$

Donc, pour $x > A$, $\sin(x) > -1$.

Or, par 5.2., il existe $y > A$ tq. $\sin(y) = -1$,

Contr. Donc $l \neq 1$. Il existe $B > 0$ t.q.

$$x > B \Rightarrow |\sin(x) - l| < \frac{|l-1|}{2},$$

Donc, pour $x > B$,

$$|l - 1| \leq |\sin(x) - 1| + |\sin(x) - l|$$

$$|l-1| < |\sin(x) - 1| + \frac{|l-1|}{2}$$

donc $|\sin(x) - 1| > \frac{|l-1|}{2}$.

Or, par 5.2, il existe $y > B$ t.q. $\sin(y) = 1$,

Contr. Donc l n'existe pas.

Ex. 1 (Suppl.)

1. On vérifie que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien définies et les rel. de récurrence.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(x_n = \frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2} ; y_n = \frac{-x_{n-1}+5y_{n-1}}{4} ; x_n < y_n ; d_n = \frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{4v} ; t_n = t_{n-1}+d_n ; y_n - x_n = \frac{3}{4}(y_{n-1}-x_{n-1}) \right.$

Comme $t_0=0, y_0=\ell$, $x_0=0$, $x_1 = \frac{\ell}{2} = 2v\times d_1$ et $y_1 = y_0 + v d_1$,

On a
$$x_1 = \frac{\ell}{2} = \frac{y_0+x_0}{2}, \quad d_1 = \frac{\ell}{4v} = \frac{y_0-x_0}{4v}, \quad y_1 = \ell + \frac{\ell}{4} = \frac{5\ell}{4} = \frac{5y_0-x_0}{4}$$
et $t_1 = t_0 + d_1$. De plus,
$$y_1 - x_1 = \frac{5y_0-x_0}{4} - \frac{y_0+x_0}{2} = \frac{3y_0-3x_0}{4} = \frac{3}{4}(y_0-x_0) > 0.$$

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}^*$.

Comme $y_n > x_n$, $2v\,d_{n+1} = \frac{y_n-x_n}{2}$ donc $d_{n+1} = \frac{y_n-x_n}{4v}$

et $t_{n+1} = t_n + d_{n+1}$. De plus
$$x_{n+1} := x_n + 2v\,d_{n+1} = x_n + \frac{y_n-x_n}{2} = \frac{y_n+x_n}{2},$$
$$y_{n+1} := y_n + v\,d_{n+1} = y_n + \frac{y_n-x_n}{4} = \frac{5y_n-x_n}{4},$$
$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{5y_n - x_n - 2(y_n+x_n)}{4} = \frac{3(y_n-x_n)}{4} > 0.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récu., les suites sont bien définies et

$\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{-x_n+5y_n}{4}$ et $y_{n+1}-x_{n+1} = \frac{3}{4}(y_n-x_n)$,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+1} = \frac{y_n-x_n}{4v}$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{4v} = \frac{1}{4v} \times \frac{3}{4}\left(y_{n-1} - x_{n-1}\right) = \frac{3}{4} d_n ,$$

2 _ On a déjà montré que

$\forall n \in \mathbb{N}, \; y_n > x_n$.

3 _ Par hyp., on a $x' = 2v$ et $y' = v$

donc $\begin{cases} x(t) = 2vt + x_0 = 2vt \\ y(t) = vt + y_0 = vt + \ell . \end{cases}$

Soit $\Delta = \frac{1}{v} > 0$. On a

$x(t) < y(t) \iff 2vt < vt + \ell \iff vt < \ell$

$\iff t < \Delta .$

de même, $x(t) > y(t) \iff t > \Delta$.

4 _ Par récu., on vérifie que, pour $n \geq 1$,

$$d_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} d_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{\ell}{4v}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right] \frac{\ell}{4v}$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{j}\right] \frac{\ell}{4v} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \times \frac{\ell}{4v}$$

$$= \frac{\ell}{v}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < \frac{\ell}{v} =: \Delta ,$$

Donc, pendant l'observation, le temps reste $< \Delta$

il est donc normal par 3. que, pendant l'observation, Achille soit derrière la tortue, Ex. 16 (Suppl.).

1_ Par hyp., $s \mapsto a(s)$ et $s \mapsto a(s)f(s)$ sont conti. donc leurs primitives sont dérivables, par produit et composition, g est dérivable et, pour $t \geq 0$,

$$g'(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds}(-a(t))\int_0^t a(s)f(s)ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\,a(t)f(t)$$

$$= \underset{\geq 0}{a(t)}\,\underbrace{e^{-\int_0^t a(s)ds}}_{>0}\,\underbrace{\left[f(t) - \int_0^t a(s)f(s)ds\right]}_{\leq f(0) \text{ par } (4)},$$

donc

$$g'(t) \leq f(0)\,a(t)\,e^{-\int_0^t a(s)ds}.$$

or $\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^x a(s)ds}\right) = e^{-\int_0^x a(s)ds} \times (-a(x))$

donc $g'(t) \leq f(0)\,\frac{d}{dx}\left(-e^{-\int_0^x a(s)ds}\right)(t)$

2_ Pour $t \geq 0$,

$$g(t) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{g(0)} = \int_0^t g'(x)dx \overset{\text{par } 1)}{\leq} \int_0^t f(0)\frac{d}{dx}\left(-e^{-\int_0^x a(s)ds}\right)dx$$

donc $g(t) \leq f(0) \times \left[-e^{-\int_0^x a(s)ds}\right]_0^t = f(0)\left(1 - e^{-\int_0^t a(s)ds}\right).$

3 - Par (4), on a, pour $t \geq 0$

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} f(t) \leq f(0) e^{-\int_0^t a(s)ds} + g(t)$$

Car $e^{-\int_0^t a(s)ds} > 0$. Par (7), on en déduit, pour $t \geq 0$,

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} f(t) \leq f(0) e^{-\int_0^t a(s)ds} + f(0)\left(1 - e^{-\int_0^t a(s)ds}\right) = f(0).$$

D'où, comme $e^{\int_0^t a(s)ds} > 0$,

$$f(t) \leq f(0) e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

4 - Pour $t \geq 0$, on a

$$h(t) - h(0) = \int_0^t h'(s)ds \leq \int_0^t a(s)h(s)ds$$

$$h(t) \leq h(0) + \int_0^t a(s)h(s)ds.$$

Comme $h \geq 0$ et h est cont. (car dérivable), on peut appliquer 3 à $f = h$ donc (5) est valable pour $f = h$.

Ex. 17 :

1 - h_n est poly. donc C^1. Pour $t \geq 0$, on a

$$h_n'(t) = \underline{(n+1)}(n+1+t)^n.$$

2 - Pour $t \geq 0$, on a, $n+1+t \geq 0$ donc

$$h_n'(t) \leq (n+1+t)(n+1+t)^n = h_n(t).$$