3- Comme $h_n \geq 0$, on peut appliquer le 4. de l'ex. 16. On obtient

$$\forall t \geq 0, \quad h(t) \leq h(0)\, e^{\int_0^t ds} = (n+1)^{n+1} e^{t}.$$

4- Pour $t \geq 0$, on a

$$t^{n+1} \leq (n+1+t)^{n+1} = h_n(t) \leq (n+1)^{n+1} e^{t}$$

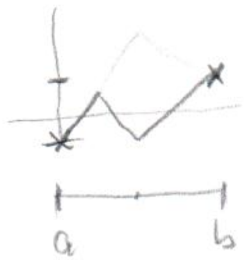
par 3.

5- Pour $t > 0$, on a, par 4,

$$0 \leq t^n e^{-t} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

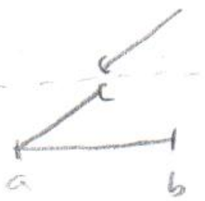
Par le th. des gendarmes, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n e^{-t} = 0$.

Ex. 6 (TD 7).



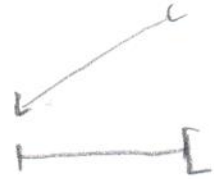
6.1. F

6.2. V → cours



6.3. F

6.4. F



6.5. F

6.6. V

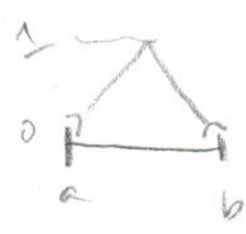
6.7. V

6.8. F

$f : [-1;0[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (1+x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6.9. F

6.10. V



6.11. F

6.12. F

preuve de 6.6 :

On a $|f| : [a;b] \to \mathbb{R}^{+*}$ et elle est conti. par composition. De plus, $|f|$ atteint sa borne inférieure c. Dnc $|f|$ ne s'annule pas, $c>0$.

Comme, pour $x \in [a;b]$, $|f(x)| \geq c > 0$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{c}.$$

Dnc $\frac{1}{f}$ est bornée.

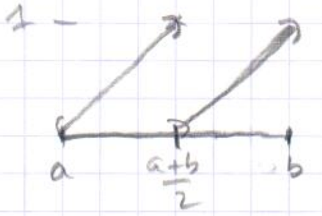
preuve de 6.7 :

$$f([a;b]) = [\inf f ; \sup f]$$

par le CnIS.

6.9 :

f



$f([a;b)) = [0;1]$

mais f est discontinue en $\frac{a+b}{2}$.

6.10 : c'est la contraposée de 6.7.

6.11 : $f = \text{cte}$ est un contre-exemple.

6.12 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \underbrace{(1+\sin(x))}_{\geq 0}\frac{1}{1+|x|} \geq 0$.

Pour $x>0$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{1+x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$ dnc $\lim_{+\infty} f = 0$ par le th. des gendarmes.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Soit $N = E\left(\frac{|M|}{2\pi}\right)+1$.

On a $2(N+1)\pi > (2N+\frac{3}{2})\pi > M$ et $f((2N+\frac{3}{2})\pi) = 0 < f(2(N+1)\pi)$.

Dnc f n'est pas $\searrow$ sur $[M;+\infty[$.

Ex. 11 (suppl.)

1 _ Soit $\sigma \in \{-1;1\}$. Pour $(x;\theta)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$|x - e^{i\sigma\theta}|^2 = (x - e^{i\sigma\theta})\overline{(x - e^{i\sigma\theta})}$$
$$= (x - e^{i\sigma\theta})(x - e^{-i\sigma\theta})$$
$$= x^2 - 2\mathrm{Re}(e^{i\sigma\theta})x + 1$$
$$= x^2 - 2\cos(\theta)x + 1.$$

2 _ (Les racines du poly. $X^{2n}-1$ sont les racines $2n$ièmes de 1. On peut aussi les trouver en cherchant les racines carrées des racines $n$ièmes de 1)

Par le cours d'algèbre, on a

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Donc

$$X^{2n}-1 = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)\left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\left(\frac{k-n}{n}\right)\pi}\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{n-1}\left(X - e^{-i\frac{l\pi}{n}}\right)$$
$$= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$

3 - Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$.

Par 1, on a, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 \geqslant 0.$$

De plus, c'est nul ssi $x = e^{i\theta}$,

Comme $|x| \neq 1$, $x \neq e^{i\theta}$ pour tout θ dans $\mathbb{R}$.

Donc $[0;\pi] \ni \theta \xmapsto{f} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$

est bien déf. et conti. par composition.

4 - D'après le résultat admis sur les sommes de Riemann appliqué à f,

$$I(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x)$$

où $$v_n(x) = \frac{\pi - 0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k\frac{(\pi - 0)}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \ln\left((x^2 - 2x + 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \ln\left((x-1)^2 \times \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{x-1}{x+1} \times (x^{2n} - 1)\right)$$

d'après 2, car $x^2 \neq 1$.

<u>1^{er} Cas</u> : $|x| < 1$. Par le cours, $x^{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

et, comme ln est conti.,

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right) \longrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \in \mathbb{R},$$

Comme $\lim \frac{\pi}{n}$, $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$ par produit.

Donc $I(x) = 0$.

2ème cas : $|x| > 1$. Par le cours, $x^{-2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n(x) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)\times x^{2n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)\right) + \ln(x^{2n})\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\left(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x-1}{x+1}}\right) + \pi\ln(x^2)$$

$\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Donc $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = \pi\ln(x^2) = 2\pi\ln|x|$.

D'où $I(x) = 2\pi\ln|x|$. ✓

Ex. 12 :

1 -

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos(\theta) + 1\right)d\theta$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(\frac{1-2x\cos(\theta)+x^2}{x^2}\right)d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\ln\left(x^2-2x\cos(\theta)+1\right) - \ln(x^2)\right]d\theta$$

$$= I(x) - \pi\ln(x^2).$$