2 — Par 1 de l'ex. 11,

$$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln\left(|-x - e^{-i\theta}|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(|x + e^{-i\theta}|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{-i(\theta-\pi)}|^2\right) d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i(\pi-\theta)}|^2\right)(-d\theta) \quad \theta' = \pi - \theta$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \ln\left(|x - e^{i\theta'}|^2\right) d\theta' \quad \text{ch. de var.}$$

$$= + \int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\theta'}|^2\right) d\theta' = I(x).$$

3 — On a

$$I(x^2) = \int_0^{\pi} \ln\left(|x^2 - e^{i\theta}|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(|(x - e^{i\frac{\theta}{2}})(x + e^{i\frac{\theta}{2}})|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\theta/2}|^2 \, |x + e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\theta/2}|^2\right) d\theta + \int_0^{\pi} \ln\left(|x + e^{-i\frac{\theta}{2}}|^2\right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \ln\left(|x - e^{i\frac{\theta}{2}}|^2\right)\left(\tfrac{1}{2}d\theta\right) + \int_0^{\pi} |x - e^{i(\pi - \frac{\theta}{2})}|^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} |x - e^{i\theta'}|^2 d\theta' - 2\int_0^{\pi} |x - e^{i(\pi - \frac{\theta}{2})}|^2 \left(-\tfrac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} |x - e^{i\theta'}|^2 d\theta' - 2\int_{\pi}^{\pi/2} |x - e^{i\theta'}|^2 d\theta'$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} |x - e^{i\theta}|^2 d\theta + 2\int_{\pi/2}^{\pi} |x - e^{i\theta}|^2 d\theta = 2I(x).$$

97

4 - Soit $0 < x < 1/4$.

Soit $f : ]-1;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$
$u \longmapsto \ln(1+u)$.

$f$ est $C^1$ et $f'(u) = \frac{1}{1+u}$, On applique le Th. des $\nearrow$ finis à $f$ :

$$\forall u > -1, \exists \theta' \in ]0;1[ ; \quad f(u) - \underbrace{f(0)}_{=0} = u f'(\theta' u)$$

donc

$$\forall u > -1, \exists \theta' \in ]0;1[ ; \quad \ln(1+u) = \frac{u}{1+\theta' u}.$$

Pour $\theta \in [0;\pi]$, $u = x^2 - 2x\cos\theta \geq -1$ donc

$$\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) = \frac{x^2 - 2x\cos(\theta)}{1 + \theta'(x^2 - 2x\cos\theta)}$$

Pour $\theta \in [0;\pi]$,

$$1 + \theta'(x^2 - 2x\cos\theta) = 1 + \theta'(|x - e^{i\theta}|^2 - 1)$$
$$= 1 - \theta' + \theta' |x - e^{i\theta}|^2$$

Si $\theta' \geq \frac{1}{2}$, $1 + \theta'(x^2 - 2x\cos\theta) \geq \frac{1}{2}|x - e^{i\theta}|^2 \geq \frac{1}{2}\min(|x-1|, |x+1|)$

Si $\theta' \leq \frac{1}{2}$, $1 + \theta'(x^2 - 2x\cos\theta) \geq \frac{1}{2}$

donc $1 + \theta'(x^2 - 2x\cos\theta) \geq \frac{1}{2}\min(1 ; \underbrace{|x-1|}_{\geq 3/4} ; \underbrace{|x+1|}_{\geq 1}) \geq \frac{3}{8}$.

D'où $$\left| \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1) \right| \leq \frac{|x|(|x| + 2)}{3/8} \leq 8x.$$

et

$$|I(x)| \leq \int_0^{\pi} \left|\ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)\right| d\theta \leq \underbrace{\frac{|x|(|x|+2)\pi}{C}}_{x \to 0} \to 0$$

5 - Donc $\lim_{x \to 0^+} I = 0$, par le Th. des gendarmes.

or $I(0) = \int_0^{\pi} 0 \, d\theta = 0$ donc $I$ est conti. en $0$.

6 -

Soit $0 < x < 1$.

Par récurr., on vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ I\left(x^{(2^n)}\right) = 2^n I(x) \quad (*)$$

Comme $\lim 2^n = +\infty$, et $0 < x < 1$, $x^{(2^n)} = e^{\overbrace{2^n \ln x}^{<0}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $I$ est conti. en $0$, $I\left(x^{(2^n)}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} I(0) = 0$.

Comme $\lim 2^n = +\infty$, ceci n'est possible que si $I(x) = 0$ par $(*)$. Donc $I = 0$ sur $]0;1[$.

Par 2, $I = 0$ sur $]-1;1[$.

Soit $x > 1$. Comme $0 < \frac{1}{x} < 1$, $I\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc, par 1,

$$0 = I(x) - \pi \ln(x^2).$$

D'où $I(x) = 2\pi \ln|x|$.

Par 2, cette formule est encore valable sur $]-\infty; -1[$.

Ex. 2 (TD8).

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
$x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

En effet, la fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$

vérifie $g_1(\mathbb{R}) \subset [1;+\infty[$ et $\sqrt{\cdot}$ est déf. sur $[1;+\infty[$.

De plus, comme $g_1$ est dérivable et $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$, $f$ est dérivable par composition.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$\sqrt{x^2-4}$ est déf. ssi $x^2-4 \geq 0$ ssi $x^2 \geq 2^2$
ssi $|x| \geq 2$

(car $|x| \geq 0$).

Donc $f_2 : \overbrace{]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[}^{D} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$

est bien déf. Soit $g_2 : D \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2-4$

est dérivable et positive. Elle est strict. positive sur $D \setminus \{-2;2\}$.
Comme $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f_2$ est dérivable sur $D \setminus \{-2;2\}$ par composition.

On montre **que** $f_2$ n'est pas dérivable en $-2$ **ni** en $2$.

Pour $x \in D$ avec $|x-2|<1$, on a $x>2$ et

$$\frac{f_2(x)-f_2(2)}{x-2} = \sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$$

Quand $x \underset{>}{\to} 2$, $x+2 \to 4 > 0$ donc $\frac{x+2}{x-2} \to +\infty$
et par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f_2(x)-f_2(2)}{x-2} = +\infty$. $f_2$ n'est pas dérivable en 2.

Pour $x \in D$ avec $|x+2|<1$, on a $x<-2$ et