Ex. 1. Justifications.

→ $[-2;3]$ est un vois. de 1 :
Comme $]1-1;1+1[=]0;2[\subset [-2;3]$, $[-2;3]$ est un vois. de 1 d'après la définition.

→ $[0;+\infty[$ est un vois. de $+\infty$:
Comme $]1;+\infty[\subset [0;+\infty[$, $[0;+\infty[$ est un vois. de $+\infty$ par la définition.

→ $]0,5;1,3[\cup]3;+\infty[$ est un vois. de 1 :
Comme $]1-0,1;1+0,1[=]0,9;1,1[\subset]0,5;1,3[\subset]0,5;1,3[\cup]3;+\infty[$

→ $]0,5;1,3[\cup]3;+\infty[$ est un vois. de $+\infty$:
Comme $]3;+\infty[\subset]0,5;1,3[\cup]3;+\infty[$, $]0,5;1,3[\cup]3;+\infty[$ est un vois. de $+\infty$ par la déf.

→ $[0;1]$ n'est pas un vois. de 1 : Supposons le contraire. Alors, par définition, il existe $\delta > 0$ t.q. $]1-\delta;1+\delta[\subset [0;1]$.
Contradiction car $1+\frac{\delta}{2} \in]1-\delta;1+\delta[$ mais $1+\frac{\delta}{2} \notin [0;1]$.

→ $\mathbb{Z}$ n'est pas un vois. de 1 : Supposons le contraire.
Il existe donc $\delta > 0$ t.q. $]1-\delta;1+\delta[\subset \mathbb{Z}$.
Soit $0 < \alpha < \min(1;\delta)$. On a $1 \leq 1+\alpha < 1+\delta$ donc $1+\alpha \in]1-\delta;1+\delta[$.
Comme $0<\alpha<1$, $1+\alpha \in]1;2[$ donc $1+\alpha \notin \mathbb{Z}$. Contr. avec

→ $\mathbb{Z}$ n'est pas un vois. de $+\infty$: Supposons le contraire.
Alors il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. $]A;+\infty[\subset \mathbb{Z}$. $(*)$
En notant par $E(A)$ la partie entière de A, on a $E(A) \in \mathbb{Z}$ et
$E(A) \leq A < E(A)+1$. Donc $E(A)+\frac{3}{2} \geq E(A)+1 > A$ et $E(A)+\frac{3}{2} \in]A;+\infty[$
Contr. avec $(*)$ car $E(A)+\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

→ $[0;1]$ n'est pas un vois. de $+\infty$: Supposons le contraire.
Alors il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. $]A;+\infty[\subset [0;1]$.
Contr. car $|A|+2 \in]A;+\infty[$ et $|A|+2 \notin [0;1]$.

Ex. 2. On traite seulement le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$.
Les autres cas sont similaires.

Par hyp., il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ t.q.

$$]x_0 - \delta_1 ; x_0 + \delta_1[\underset{(1)}{\subset} U_1 \quad \text{et} \quad]x_0 - \delta_2 ; x_0 + \delta_2[\underset{(2)}{\subset} U_2 .$$

Donc

$$]x_0 - \delta_1 ; x_0 + \delta_1[\subset U_1 \subset U_1 \cup U_2 .$$

Donc $U_1 \cup U_2$ est un vois. de x_0.

Soit $\delta = \min(\delta_1 ; \delta_2) > 0$. On a

$$]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\underset{\text{car } \delta \leq \delta_1}{\subset}]x_0 - \delta_1 ; x_0 + \delta_1[\underset{\text{cf. }(1)}{\subset} U_1$$

et

$$]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\underset{\text{car } \delta \leq \delta_2}{\subset}]x_0 - \delta_2 , x_0 + \delta_2[\underset{\text{cf. }(2)}{\subset} U_2 .$$

Donc $]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\subset U_1 \cap U_2$. Donc $U_1 \cap U_2$ est un vois. de x_0.

Rq : $[-2 ; 3] \cup [7 ; 9]$ vois. de 1 ?

Oui car il contient $[-2 ; 3]$ qui est un vois. de 1 (cf. Ex. 1). C'est un "agrandissement" de $[-2 ; 3]$.

$[-2 ; 3] \cup [2 ; 5]$ vois. de 1 ?

Oui pour la même raison.

$[0 ; 1] \cup [1 ; 2]$ vois. de 1 ?

Oui car c'est $[0 ; 2]$ qui contient $]1 - 0,5 ; 1 + 0,5[$.

On remarque que ni $[0 ; 1]$ ni $[1 ; 2]$ n'est un vois. de 1.

Suites :

On s'intéresse aux fonctions définie dans $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$: $u : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{N}$.

Le cas où D est une partie finie de $\mathbb{N}$ ne sera pas intéressant pour ce que l'on veut étudier.

On supposera donc **D infinie**.

Déf : Une suite réelle (resp. complexe) est une appl. $u : D \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour $n \in D$, on note souvent $u(n)$ par u_n.

Exemples pour D : $D = \mathbb{N}$, $D = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$D = 2\mathbb{N}+1 := \{2n+1 \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Exemples de suites : $u : \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto \frac{1}{n} \end{array}$, $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto (-1)^n \end{array}$)

$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ n \mapsto i^n \end{array}$; $u : \begin{array}{l} 2\mathbb{N}+1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto \dfrac{n}{1-(-1)^n} \end{array}$.

Suites définies par récurrence (cas réel seulement) :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

On suppose que $\underbrace{f(D_f)}_{:= \{f(x);\, x \in D_f\}} \subset D_f$.

Les conditions $\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N} \,;\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

définissent-elles une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

Comment être sûr que 10^{31} a bien une seule image ?

On va vérifier par récurrence que, pour tout n, u_n est bien défini. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{P}(n) = \left(u_n \text{ est bien défini et } u_n \in D_f \right)$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car on a choisi u_0 dans D_f.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$.

Par hyp. de récu., u_n est bien défini et $u_n \in D_f$.

Donc $f(u_n)$ est bien défini. D'après la condition précédente, $u_{n+1} = f(u_n)$ est donc bien défini.

De plus, comme $u_n \in D_f$ et $f(D_f) \subset D_f$,

$u_{n+1} = f(u_n) \in D_f$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Rq : * ceci est encore valable si $f : D_f \to \mathbb{C}$ avec $D_f \subset \mathbb{C}$ et $f(D_f) \subset D_f$

* ceci est encore valable si, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on impose $\begin{cases} u_{n_0} \in D_f \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

* Que se passe-t-il si $f(D_f) \not\subset D_f$?

admis

→ il est possible que, pour tout $u_0 \in D_f$, la suite ne soit pas définie.

→ il est possible que, pour certains $u_0 \in D_f$, la suite ne soit pas définie et qu'elle le soit pour d'autres

→ il se peut qu'elle soit toujours déf.

Exemples :

* Soit $r \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+r\end{array}$. On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) \subset D_f$ donc, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donnée par $\begin{cases} u_0 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

est bien définie. C'est une suite arithmétique de raison r.

* Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a \times x.\end{array}$ On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) \subset D_f$. Donc, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donnée par $\begin{cases} u_0 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n \end{cases}$

est bien définie. C'est une suite géométrique de raison r.

* Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : [n_0 ; +\infty[\cap \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
Soit $S : [n_0 ; +\infty[\cap \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ la suite donnée par

$$\begin{cases} S_{n_0} = u_{n_0} \\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[,\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1}. \end{cases}$$

On vérifie par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, S_n est bien défini. Donc S est bien définie. Pour $n \geq n_0$, on note "sigma"

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On vérifie par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $(a;b) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} (a u_k + v_k) = a\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \sum_{k=n_0}^{n} v_k, \quad \sum_{k=n_0}^{n} (u_k + b) = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + (n - n_0 + 1) b,$$

et, pour $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_{k+p} = \sum_{\ell=n_0+p}^{n+p} u_\ell$.