

$$\frac{f_2(x) - f_2(-2)}{x+2} = -\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}} = -\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

100

Quand $x \rightarrow -2$, $x-2 \rightarrow -4 < 0$ due $\frac{x-2}{x+2} \rightarrow +\infty$

et, par composition, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f_2(x) - f_2(-2)}{x+2} = -\infty$,

Donc f_2 n'est pas dérivable en -2 . ✓

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. On montre que h est dérivable

sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0 .

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. g est C^1 , positive

et ne s'annule qu'en 0 . Donc $h|_{\mathbb{R}^*} = \sqrt{\cdot} \circ g|_{\mathbb{R}^*}$

est dérivable par composition. De plus, pour $x \neq 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x) = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Par $x \neq 0$, $\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{|x|}{x}$ due $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = -1 \neq 1$. Donc h n'est pas dérivable en 0 .

Soit $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x-1|$. L'appl. $g_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$ est C^1 ,

$g_3|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$ ne s'annule pas due, $f_3|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} = h|_{\mathbb{R}^*} \circ g_3|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$ est dérivable par composition,

Par $x \neq 1$, on a $\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

due $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1}$.

f_3 n'est pas dérivable en 1 .

Ex. 3 (TD 8).

101

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc f est dérivable
 $x \mapsto x^2 + 3x$

par composition. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x^2 + 3x) \times (2x + 3).$$

Rq.: en fait, si g est dérivable, f l'est aussi et

$$f''(x) = g''(x^2 + 3x)(2x + 3)^2 + 2g'(x^2 + 3x).$$

$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ h est dérivable par somme,
 $x \mapsto x + g(x)$

Donc f est dérivable par composition. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = g'(x + g(x)) \times (1 + g'(x)).$$

Ex. 4.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto e^{zx}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = e^{x \operatorname{Re}(z)} \left(\cos(x \operatorname{Im}(z)) + i \sin(x \operatorname{Im}(z)) \right).$$

Les fonct. $x \mapsto \cos(x \operatorname{Im}(z))$, $x \mapsto \sin(x \operatorname{Im}(z))$

et $x \mapsto e^{x \operatorname{Re}(z)}$ étant dérivables, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$

le sont aussi par produit. Donc f est dérivable.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(\operatorname{Re} f)'(x) = e^{x \operatorname{Re}(z)} \left(\operatorname{Re}(z) \cos(x \operatorname{Im}(z)) - \sin(x \operatorname{Im}(z)) \operatorname{Im}(z) \right)$$

$$(\operatorname{Im} f)'(x) = e^{x \operatorname{Re}(z)} \left(\operatorname{Re}(z) \sin(x \operatorname{Im}(z)) + \cos(x \operatorname{Im}(z)) \operatorname{Im}(z) \right)$$

On a donc

$$f'(z) = (\operatorname{Re} f)'(z) + i (\operatorname{Im} f)'(z)$$

$$= e^{z \operatorname{Re}(z)} \left[\operatorname{Re}(z) (\cos(x \operatorname{Im}(z)) + i \sin(x \operatorname{Im}(z))) + i \operatorname{Im}(z) (\sin(x \operatorname{Im}(z)) + i \cos(x \operatorname{Im}(z))) \right]$$

$$= e^{z \operatorname{Re}(z)} (\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) (\cos(x \operatorname{Im}(z)) + i \sin(x \operatorname{Im}(z)))$$

$$= z e^{zx}$$

Ex. 5.

1. V. Réciproque fautive.

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On sup. f dérivable en x_0 donc il existe $\varepsilon: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0$.

pour $x \in D$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \overbrace{f'(x_0)}^{\in \mathbb{R}} + (x - x_0) \varepsilon(x)$$

$\downarrow x \rightarrow x_0$ $\downarrow x \rightarrow x_0$
 0 0

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$. f est conti. en x_0 .

Contre-exemple pour la réc.,

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x - x_0|$$

Comme vu plus haut, f n'est pas dérivable en x_0 . Par composition, f est cependant conti. en x_0 .

2. F. car f n'est pas dérivable sur $] -1; 1[$.

3. F. car $f(0) \neq f(2)$.

4. V. car f est conti. sur $[0; 2]$ et dérivable sur $]0; 2[$.

Ex. 6 (TD 8).

103

6.1. on peut étudier les fct.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x} \\ \text{et } 0 < x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1} \end{array} \right.$$

mieux: en uti. le Th. des T. finis.

Soit $x > 0$. Comme $\ln$ est C^1 , il existe, par le Th. des T. finis, un $c \in]x; x+1[$ t.q.

$$\ln(x+1) - \ln(x) = (x+1-x) \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Comme $0 < x < c < x+1$, $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

6.2.: Appliquer le Th. des T. finis sur $[a; b]$ à
 $f_n: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^{n+1}.$

6.3. Appliquer le Th. de Rolle entre 0 et 1
à la fct. donnée dans l'indication.

Ex. 9

1- Sur $]-\infty; 0[$, f est constante donc dérivable
de dérivée nulle. Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable
par composition et, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

2- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on a, par composition

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0.$$

Donc $\lim_{0^+} f = 0 = f(0)$. Comme, sur $] -\infty; 0[$, f est nulle, $\lim_{0^-} f = 0$. Donc f est conti. en 0.

3- Pour $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-1/x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0, \text{ par composition.}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4- $\left(\begin{array}{l} f \text{ est nulle sur }]-\infty; 0[\text{ donc dérivable,} \\ f' \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ par produit} \\ \text{et composition.} \end{array} \right)$

$$\text{Pour } x < 0, \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

$$\text{Pour } x > 0, \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ par composition car } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0. \end{array} \right\}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Ex. 7 (TD 8) modifié

105

Étudier : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3}$
 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^3}$.

Par Taylor, on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{qd. } x \rightarrow 0.$$

dne, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}.$$

Par Taylor, on a

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + y^2 \varepsilon(y) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0,$$

Pour $x \neq 0$,
$$\frac{\cos(x^2) - 1}{x^3} = \frac{1 - \frac{x^4}{2} + x^4 \varepsilon(x^2) - 1}{x^3} = -\frac{x}{2} + x \varepsilon(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par Taylor, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$

Pour $x > 0$,

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty.$$

$\downarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow -\infty$ $\downarrow x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$

Ex. 10 (TD 8).

1- Par définition, $-1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
 Car $f(0) = 0$.

2- Comme f est dérivable en 0, il existe une fct. ε telle que $\lim_0 \varepsilon = 0$ pr, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + x \varepsilon(x)$.

Dne $f(x) = x(-1 + \varepsilon(x))$. Comme $\lim_0 \varepsilon = 0$, il existe $\delta > 0$ ts, $|x| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < 1$.

Pour $x \in]0; \min(\delta; 1)[$, $-1 < \varepsilon(x) < 1$ dne $f(x) = x(-1 + \varepsilon(x)) < 0$.
 Il suffit de prendre $x_1 \in]0; \min(\delta; 1)[$.