

- 3- Comme $f(x_1) < 0$, $f(1) > 0$ et f est conti.
il existe $x_2 \in]x_1; 1[\subset]0; 1[$ tq. $f(x_2) = 0$ (par le th. des val. intermédiaires). ✓
- 4- Comme $f(0) = 0 = f(x_2)$ et f est dérivable (dne conti.),
il existe $x_3 \in]0; x_2[\subset]0; 1[$ tq. $f'(x_3) = 0$.

Ex. 13: (une tangente à f passant par l'origine : elle est du type $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
si c'est la tangente en c , on doit avoir $y = f(c) + f'(c)(x-c)$
donc $f'(c) = \lambda$ et $f(c) - c f'(c) = 0$
Pg. : $g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$ donc c est un zéro de g' .)

Soit $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, g est continue sur $[a; b]$
 $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et dérivable sur $]a; b[$, par quotient.

De plus, $g(a) = \frac{f(a)}{a} = 0 = \frac{f(b)}{b} = g(b)$.
Par le th. de Rolle, il existe $c \in]a; b[$; $g'(c) = 0$.
Comme, pour $x \in]a; b[$,

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

on a $c f'(c) = f(c)$. Donc la tangente de f en c a pour équation : $y = f(c) + f'(c)(x-c) = f'(c)x$.
Elle passe donc par l'origine.

Ex. 14: Soit $n \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$. Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines de f .
Pour $j \in \mathbb{N} \cap [1; n-1]$, on a f continue sur $[x_j; x_{j+1}]$,
dérivable sur $]x_j; x_{j+1}[$ et $f(x_j) = 0 = f(x_{j+1})$. Donc,
par Rolle, il existe $\beta_j \in]x_j; x_{j+1}[$ tq. $f'(\beta_j) = 0$.
Les β_j sont 2 à 2 d et il y en a $n-1$. Donc f' a au moins $n-1$ racines.

1. Soit $N = E(|a|) + 1$. On a $N > |a|$.

Par $k \geq N$, on a

$$\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|a|^k}{k!} \times \frac{|a|}{k+1} \leq \frac{|a|^k}{k!}$$

Car $k+1 \geq N \geq |a|$. Donc $\left(\frac{|a|^k}{k!}\right)_k$ est décroissante à partir de N . Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$.

Par $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|a|^k}{k!} \times \frac{|a|}{k+1}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $k \rightarrow \infty$
 Comme
 la suite d'une
 suite tendant vers l
 $\downarrow \quad \rightarrow$
 $l \quad k \rightarrow \infty$

d'où $l = l \times 0$ et $l = 0$. En parti. la suite est bornée

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} \frac{|2x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} C = \frac{C}{2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{n+1-k} = \frac{C}{2^{n+1}} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{C}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{C}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{C}{2^n} \quad (l = k - (n+1)) \end{aligned}$$

On montre :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,$

$n \geq N \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 0$,

il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N \Rightarrow 0 < \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon. \quad (*)$$

Soit $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq N$. Si $p = 0$, on a

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Si $p > 0$, on a

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$$

par (*).

3. Par déf., $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$.

Par tout $n \in \mathbb{N}$, on

$$f_n(0) = \sum_{k=0}^n \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 = 1.$$

La suite $(f_n(0))_n$ est donc égale à 1 donc sa limite $f(0)$ est 1.

Soit $x \geq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{x^k}{k!} \geq 0$. Donc, pour $n \geq 2$, on a

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x.$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans les inég.), on obtient $f(x) \geq 1 + x$.

4. Soit $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f_n(x) f_n(-x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^n \frac{(-x)^l}{l!} \right).$$

On a

$$\begin{aligned}
 f_n(x)f_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{(-1)^l x^l}{l!} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{k!l!} x^{k+l} \\
 &= \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{(-1)^l}{k!l!} \right) x^p \\
 &= \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=0}} \frac{(-1)^l}{k!l!} \right) x^0 + \sum_{p=1}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{(-1)^l}{k!l!} \right) x^p \\
 &= \frac{(-1)^0}{0!0!} \times 1 + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{p-k}}{k!(p-k)!} \right) x^p \\
 &\quad + \sum_{p=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{(-1)^l}{k!l!} \right) x^p \\
 &= 1 + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} (-1)^{p-k} \right) \frac{x^p}{p!} \\
 &\quad + \sum_{p=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{(-1)^l p!}{k!l!} \right) \frac{x^p}{p!} \\
 &= 1 + \sum_{p=1}^n \underbrace{(1+(-1))^p}_{=0!} \frac{x^p}{p} + \sum_{p=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{(-1)^l p!}{k!l!} \right) \frac{x^p}{p!}
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 |f_n(x)f_n(-x) - 1| &\leq \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=p}} \frac{p!}{k!l!} \frac{x^p}{p!} \\
 &\leq \sum_{p=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} \right) \frac{x^p}{p!} = \sum_{p=n+1}^{2n} 2^p \frac{x^p}{p!} \\
 &\leq f_{2n}(2x) - f_n(2x).
 \end{aligned}$$

Comme f est conti., on peut passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans ces inégalités et on obtient:

$$0 \leq |f(x)f(-x) - 1| \leq 0.$$

Car $(f_{2n}(x))_n$ est une s. suite de $(f_n(x))_n$ 110
et donc a m. limite.

D'où $f(x)f(-x) = 1$.

5 - Pour $x \geq 0$, on a, par 3, $f(x) \geq 1+x > 0$.
Pour $x < 0$, on a $-x > 0$ donc $f(-x) > 0$ et, par 4,

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} > 0.$$

6 - Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

On a

$$\begin{aligned} f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - y \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \\ &= \cancel{1} + \cancel{x+y} + \sum_{k=2}^n \frac{(x+y)^k}{k!} - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k!} \right) - \cancel{y} - y \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left((x+y)^k - x^k \right) - y \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l y^{k-l} - x^k \right) - y \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} x^l y^{k-l} - y \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} x^l y^{k-l} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \binom{k}{k-1} x^{k-1} y - y \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} \end{aligned}$$

or $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \binom{k}{k-1} x^{k-1} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l+1)!} x^{l+1} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!}$ donc

$$\begin{aligned} f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-2} \frac{k!}{l!(k-l)!} x^l y^{k-l} \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^{k-2} \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = y^2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^{k-2} \frac{x^l y^{k-2-l}}{l!(k-l)!} \end{aligned}$$

Donc

111

$$|f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x)| \leq y^2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^{k-2} \frac{|x|^l}{l!} \cdot \frac{|y|^{k-2-l}}{(k-l)!}$$

$$\hookrightarrow \leq y^2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^{k-2} \frac{|x|^l}{l! (k-l)!}$$

Car $|y| \leq 1$.

Par le calcul précédent avec $(x; y)$ remplacé par $(|x|; 1)$ on a

$$f_n(|x|+1) - f_n(|x|) - f_{n-1}(|x|) = \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^{k-2} \frac{|x|^l}{l!} \frac{1}{(k-l)!}$$

donc

$$|f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x)| \leq [f_n(|x|+1) - f_n(|x|) - f_{n-1}(|x|)] y^2$$

7. Comme 1.1 est fini, on peut passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans les inég. précédentes. On obtient

$$|f(x+y) - f(x) - y f'(x)| \leq [f(|x|+1) - 2f(|x|)] y^2$$

car $(f_{n-1}(x))_{n \geq 1}$ est une suite de $(f_n(x))_n$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $0 \leq |y| \leq 1$, on a, d'après 7,

$$\left| \frac{f(x+y) - f(x)}{y} - f'(x) \right| \leq (f(|x|+1) - 2f(|x|)) |y| \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0$$

donc, par le th. des gendarmes, f est dérivable en x et $f'(x) = f(x)$.

9. D'après 5 et 8, on a :

412

	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	$\nearrow +\infty$	

Par $x > 0$, on a, par 3, $f(x) \geq 1+x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, par le th. des gendarmes.

Par $x < 0$, on a, par 4, $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, on a
 par composition et quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Par $x \geq 0$ et $n \geq m$, on a

$$f_n(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}}_{=0 \text{ si } m=0} + \frac{x^m}{m!} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \frac{x^k}{k!}}_{=0 \text{ si } m=n} \geq \frac{x^m}{m!}$$

Car les $\frac{x^k}{k!} \geq 0$. Par passage à la limite $n \rightarrow \infty$
 dans ces inégalités, on obtient $f(x) \geq \frac{x^m}{m!}$.

11. Par $x > 0$, on a, par 10,

$$\frac{f(x)}{x^p} \geq C_{p+1} \frac{x^{p+1}}{x^p} = C_{p+1} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^p} = +\infty$, par le th. des gendarmes.

Par $x < 0$, on a, par 4

$$|f(x) x^p| = \frac{|x|^p}{f(-x)} = \left(\frac{f(-x)}{(-x)^p} \right)^{-1}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, on a, par composition et quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) x^p = 0$.

12. g est bien déf., car f ne s'annule pas. 113
De plus, comme f est dérivable, g l'est par quotient.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{f'(x+y)f(x) - f(x+y)f'(x)}{f(x)^2}$$

cf. 8 $\Rightarrow$
$$\frac{f(x+y)f(x) - f(x+y)f(x)}{f(x)^2} = 0.$$

13. On a g est constante. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0)$ donc

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$$

d'où $f(x+y) = f(x)f(y)$

par 3.