Ex. 18 (Suppl.

1 - Sur $]-\infty;0[$, g est nulle donc de classe C^∞,
sur $]0;+\infty[$, g est la composée de 2 fonct. de classe C^∞ donc est elle-même de classe C^∞.

2 - Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{P}(n) = \left(\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \; ; \; \deg P_n = 2n \text{ et } \forall x>0 ; g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \right).$$

En posant $P_0 = 1$, on a, pour $x>0$,
$g^{(0)}(x) = g(x) = 1 \times g(x)$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Pour $x>0$,

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' \underset{\text{H.R.}}{=} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' g(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) g'(x)$$

$$= P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} \times g(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right) g(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) g(x)$$

où $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$ est de deg. $2 + 2n = 2(n+1)$.

3 - Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $g^{(n)}$ est nulle sur $]-\infty;0[$ donc $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} g^{(n)}(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{y \to +\infty} P_n(y) e^{-y} = 0$, par croissance comparée, comme $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$, on a, par composition,

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} g^{(n)}(x) = 0,$$

Donc $\lim_0 g$ existe et vaut 0.

Ceci étant vrai pour tout n, on en déduit, par le résultat admis, que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$.

4- Pour $x \leq 0$, on a $g(x) = g'(x) = 0$ (cf. 1. et 2).

Pour $x > 0$,

$$g(x) = e^{-1/x} > 0 \text{ et } g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} > 0.$$

5- D'après 4, on a

$$\big((g(x) > 0) \iff (x > 0) \big) \text{ et } \big((g'(x) > 0) \iff (x > 0) \big).$$

Ex. 19 (Suppl.)

1- (a). h_1 et h_2 sont la composée de g avec une fonction poly., donc la composée de deux fonct. de classe C^∞ (cf. Ex. 18 pour g).

Donc h_1 et h_2 sont de classe C^∞.

(b). Comme g est positive, h_1 et h_2 sont positives.

(c). D'après l'ex. 18., on a

$$(h_1(x) > 0) \iff (g(x^2-1) > 0) \iff (x^2-1 > 0) \iff (|x| > 1)$$

donc, comme $h_1 \geq 0$,

$$(h_1(x) = 0) \iff (|x| \leq 1).$$

On a

$$(h_2(x) > 0) \iff (g(4-x^2) > 0) \iff (4-x^2 > 0) \iff (|x| < 2)$$

donc, comme $h_2 \geqslant 0$,

$$(h_2(x) = 0) \iff (|x| \geqslant 2).$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme h_1 et h_2 sont positives, $h_1(x) + h_2(x) \geqslant 0$. Si c'était nulle alors on aurait $h_1(x) = 0$ et $h_2(x) = 0$. Donc, d'après 1 (c), $x \in [-1;1]$ et $x \notin]-2;2[$. Contr.

Donc $h_1(x) + h_2(x) > 0$.

2- (a) Par 1(d), f est bien définie. Par 1(a), par somme et quotient, f est de classe C^∞.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, comme $h_1(x) \geqslant 0$,

$$0 \leq h_2(x) \leq h_2(x) + h_1(x)$$

et, par 1 (d),

$$0 \leq \underbrace{\frac{h_2(x)}{h_2(x)+h_1(x)}}_{=f(x)} \leq 1.$$

(c). On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) = 0) \iff (h_2(x) = 0) \iff (x \notin]-2;2[)$$

par 1. (c).

(d) On a, pour $x \in \mathbb{R}$, d'après 1(d),

$$(f(x) = 1) \iff (h_2(x) = h_2(x) + h_1(x))$$

$$\iff (h_1(x) = 0) \iff x \in [-1;1]$$

d'après 1. (c). Donc $f^{-1}(1) = [-1;1]$.

(e). Soit $x \in \mathbb{R}$ t.q. $1 < |x| < 2$, On a

$$f'(x) = \frac{h_2'(x)\left(h_2(x)+h_1(x)\right) - h_2(x)\left(h_2'(x)+h_1'(x)\right)}{\left(h_2(x)+h_1(x)\right)^2}$$

$$= \frac{h_2'(x)h_1(x) - h_2(x)h_1'(x)}{\left(h_2(x)+h_1(x)\right)^2}$$

$$= \frac{g'(4-x^2)(-2x)g(x^2-1) - g(4-x^2)g'(x^2-1)2x}{\left(h_2(x)+h_1(x)\right)^2}$$

$$= \frac{-2x}{\left(h_2(x)+h_1(x)\right)^2}\left(g'(4-x^2)g(x^2-1) + g(4-x^2)g'(x^2-1)\right).$$

		-2		-1	0	1		2	
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$4-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$g(x^2-1)$	>0		>0	0	0	0	>0		>0
$g(4-x^2)$	0		>0		>0		>0		0
$-2x$	$-$		>0		$-\ 0\ +$		<0		$+$
$f'(x)$			>0				<0.		

Donc f est str. ↗ sur $[-2;-1]$ et str. ↘ sur $[1;2]$, par le cours.

3- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto \frac{g(a^2-x^2)}{g(a^2-x^2)+g(x^2-b^2)}$$

Convient.