Ex. 6 (feuille suppl.)

1 – On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ donc exp est str. ↗. Comme exp est conti, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R})$, par le cours.

Détermination de $\exp(\mathbb{R})$:

par déf. de l'exp., on sait que $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

De plus, on sait que $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}^{*+}$. Par déf. des limites précédentes, il existe $A > 0$ et $B > 0$ t.q.

$$x > A \Rightarrow \exp(x) > y$$

et

$$x < -B \Rightarrow 0 < \exp(x) < y.$$

Donc, $\exp(A+1) > y > \exp(-B-1)$. Comme exp est conti., $y \in \exp(\mathbb{R})$ par le Th. des val. interm.

D'où $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$.

2 – Comme exp' ne s'annule pas, le cours permet de montrer que ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall y > 0, \quad \ln'(y) = (\exp^{<-1>})'(y) = \frac{1}{\exp'(\exp^{<-1>}(y))}$$

$$= \frac{1}{\exp(\exp^{<-1>}(y))} = \frac{1}{y}.$$

3 – Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable par composition et $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Sur $]-\infty; 0[$, f est dérivable par composition de ln et de $0 > x \mapsto -x$ donc

$$\forall x<0, \quad f'(x) = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

4 - Correction du texte : Soit $p_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$.
Par composition, p_α est dérivable et, pour $x>0$,

$$p_\alpha'(x) = e^{\alpha \ln x} \times \alpha \frac{1}{x} = \alpha\, e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha p_{\alpha-1}(x) \quad (*)$$

Question suppl. : montrer que, pour $\alpha \neq 0$, p_α est bij. Quelle est sa bij. réci. $p_\alpha^{\langle -1 \rangle}$?

<u>Cas $\alpha>0$</u> : par $(*)$, p_α est str. $\nearrow$. Comme elle est conti. (par composition), elle est bij. de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $p_\alpha(\mathbb{R}^{+*})$. Comme $\alpha>0$, $\lim\limits_{+\infty} p_\alpha = +\infty$ (composition) et $\lim\limits_{0} p_\alpha = 0$ (composition). Comme précédemment, on en déduit, en uti. la conti. de p_α, que $p_\alpha(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$. Donc p_α est bij.

De plus, pour $x>0$,

$$p_\alpha(p_{1/\alpha}(x)) = p_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}\ln(x)}\right) = e^{\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\ln(x)\right)} = e^{\ln(x)} = x$$

et

$$p_{1/\alpha}(p_\alpha(x)) = p_{1/\alpha}\left(e^{\alpha \ln(x)}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}(\alpha \ln(x))} = x.$$

Donc $p_{1/\alpha} = p_\alpha^{\langle -1 \rangle}$.

<u>Cas $\alpha<0$</u> : cette fois, p_α est str. $\searrow$ et $\lim\limits_{0} p_\alpha = +\infty$ (composition) et $\lim\limits_{+\infty} p_\alpha = 0$ (composition).

Comme P_α est conti., P_α est bij. de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $P_\alpha(\mathbb{R}^{+*})$. Comme précédemment, on vérifie que $P_\alpha(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$. Donc P_α est bij.

120

On vérifie aussi que $P_\alpha^{<-1>} = P_{1/\alpha}$.

5 - Comme sin est > 0 sur $]0;\pi[$, $\cos' = -\sin$ est < 0 sur $]0;\pi[$ donc, par le cours, cos est str. $\searrow$ sur $[0;\pi]$. Comme elle est conti., elle est bij. de $[0;\pi]$ sur $\cos([0;\pi]) = [\cos(\pi); \cos(0)] = [-1;1]$.

6 - Comme $\cos' < 0$ sur $]0;\pi[$, Arccos est dérivable sur $[-1;1] \setminus \{\cos 0; \cos\pi\} =]-1;1[$, par le cours. De plus, pour $y \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arccos}'(y) = \frac{1}{\cos'(\mathrm{Arccos}(y))} = \frac{-1}{\sin(\mathrm{Arccos}(y))}$$

Comme $\mathrm{Arccos}(y) \in]0;\pi[$, $\sin(\mathrm{Arccos}(y)) > 0$ et comme $\sin^2(\mathrm{Arccos}(y)) + \cos^2(\mathrm{Arccos}(y)) = 1$ on a,

$$\sin(\mathrm{Arccos}(y)) = +\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{Arccos}(y))}$$
$$= +\sqrt{1-y^2}.$$

D'où $\mathrm{Arccos}'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$,

7 - Comme $\sin' = \cos$ est > 0 sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, sin est str. $\nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Comme sin est conti., elle est bij. de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur $\sin([-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]) = [\sin(-\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2})] =$

$[-1;1]$.

Comme $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, Arcsin est, par le cours, dérivable sur
$[-1;1] \setminus \{\sin(-\frac{\pi}{2});\sin(\frac{\pi}{2})\} =]-1;1[$
et, pour $y \in]-1;1[$,

$$\text{Arcsin}'\, y = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(y))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(y))}.$$

Comme $\text{Arcsin}(y) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\cos(\text{Arcsin}(y)) > 0$
et comme $\cos^2(\text{Arcsin}(y)) + \sin^2(\text{Arcsin}(y)) = 1$,
on a

$$\cos(\text{Arcsin}(y)) = +\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(y))}$$
$$= +\sqrt{1-y^2}.$$

D'où $\text{Arcsin}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

<u>Attention</u> : pour $y \in]-1;1[$, on a bien

$$\sin(\text{Arcsin}(y)) = y = \cos(\text{Arccos}(y))$$

par déf. mais

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

<u>que si</u> $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

et

$$\text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

<u>que si</u> $x \in [0;\pi]$.