

9. Par quotient, tangente est dérivable

et, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x) \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $\tan$ est str. $\nearrow$. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Donc tangente est impaire.

Par $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(x) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$
donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

par produit. D'après l'impairité de tangente,
on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

10. Comme $\tan$ est conti. et str. $\nearrow$, elle est, par le cours, bij. de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\tan(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) \subset \mathbb{R}$.

On montre maintenant que $\tan(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Par déf. des 2 limites précédentes, il existe $\varepsilon_+ > 0$ et $\varepsilon_- > 0$ tq,

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon_- &\Rightarrow \tan(x) < y \\ \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon_+ < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \tan(x) > y. \end{aligned}$$

Donc $\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) < y < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. 123

Comme $\tan$ est conti., on en déduit, par le Th. des valeurs intermédiaires, que $y \in \tan\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\right)$.

Donc $\mathbb{R} \subset \tan\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\right)$. Or admet
 $\tan\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$.

11 - Comme la dérivée de la tangente ne s'annule pas, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(y))} = \frac{1}{1 + [\tan(\text{Arctan}(y))]^2}.$$

Or, par déf., $\tan \circ \text{Arctan} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ donc

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

12 - Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x),$$

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \frac{1}{4} \left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \right] = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{4} \times 2e^x \times 2e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

13 - Par somme et composition, ch et sh sont dérivables, puisque $\exp$ l'est. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \operatorname{sh}(x),$$

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \operatorname{ch}(x).$$

14 - $\left(\begin{array}{l} \text{Rq : Comme ch est paire, elle} \\ \text{n'est pas injective : pour } x < 0, \\ \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(-x) \text{ et } x \neq -x \end{array} \right)$

Pour $x > 0$, on a

$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x}{2}(1 - e^{-2x}) > 0$$

car $e^{2x} > 1$.

Donc ch est str. $\nearrow$ sur $[0; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$,

$$\operatorname{ch}(x) \geq \frac{e^x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, par le th. des gendarmes

15 - Comme ch est cont. et str. $\nearrow$ sur $[0; +\infty[$, elle est, par le cours, bij. de $[0; +\infty[$ sur $\operatorname{ch}([0; +\infty[)$.

Pour $x \geq 0$, on a $\operatorname{ch}(x) \geq 0$. Donc, par 12,

$$\operatorname{ch}(x) = +\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)} \geq +\sqrt{1} = 1.$$

Donc $\operatorname{ch}([0; +\infty[) \subset [1; +\infty[$.

On montre maintenant que $\operatorname{ch}([0; +\infty[) = [1; +\infty[$.

Soit $y \geq 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = +\infty$,
il existe $A > 0$ tq.

125

$$x > A \Rightarrow \text{ch}(x) > y.$$

$$\text{Dne } \text{ch}(0) = 1 \leq y < \text{ch}(A+1).$$

Comme ch est conti., y est une valeur de ch , par
le Th. des val. interm. Dne $[1; +\infty[\subset \text{ch}([0; +\infty[$.

$$\text{D'nt } \text{ch}([0; +\infty[) = [1; +\infty[.$$

16. Sur $]0; +\infty[$, $\text{ch}' = \text{sh}$ est str. > 0

(car $e^x > e^{-x}$, pour $x > 0$). Par le cours, Argch est
dérivable sur $\{y \in [1; +\infty[; \exists x > 0; y = \text{ch}(x)\}$

c'est-à-dire sur $]1; +\infty[$ (puisque $\text{ch}(0) = 1$).

Pour $y \geq 1$, on a, par 13

$$\text{Argch}'(y) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{Argch}(y))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}(y))}.$$

De plus, comme $\text{sh}(\text{Argch}(y)) \geq 0$, on a, par 12,

$$\begin{aligned} \text{sh}(\text{Argch}(y)) &= +\sqrt{\text{ch}^2(\text{Argch}(y)) - 1} \\ &= \sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned}$$

D'nt

$$\text{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Attention : on a toujours $\text{ch}(\text{Argch}(y)) = y$
mais $\text{Argch}(\text{ch}(y)) = y$ seulement pour $y \geq 0$.

17. Soit $y \geq 1$. On résout sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) = y &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ \text{et} \\ X^2 - 2yX + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Le discriminant de l'eq. du 2nd degré est :

$$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0$$

Donc

$$\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ \text{et} \\ X \in \left[y - \sqrt{y^2 - 1}; y + \sqrt{y^2 - 1} \right] \end{cases}$$

Pour $y \geq 1$, on a

$$y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow (y - 1)^2 < y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y - 1 < y + 1 \Leftrightarrow \underbrace{-1 < 1}_{\text{vraie}}$$

donc $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$. Pour $y = 1$, $y - \sqrt{y^2 - 1} = y + \sqrt{y^2 - 1}$.

Donc on a donc, comme $e^x \geq 1$,

$$\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

d'après la bij. de exp.

18. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) \geq 1 > 0$.

Donc sh. est str. $\nearrow$. Pour $x > 0$, on a

$$\sinh(x) \geq \frac{e^x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

127

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh = +\infty$, par les gendarmes.

Par symétrie, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh = -\infty$.

19. Comme $\sinh$ est conti. et str. $\uparrow$, elle est, par le cours, bij. de $\mathbb{R}$ sur $\sinh(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Par def. des limites précédentes, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tq.

$$x > A \Rightarrow \sinh(x) > y$$

et

$$x < -B \Rightarrow \sinh(x) < y.$$

$$\text{Donc } \sinh(-B-1) < y < \sinh(A+1).$$

Comme $\sinh$ est conti., $y \in \sinh(\mathbb{R})$ par le Th. des val. interm. $\Rightarrow \mathbb{R} \subset \sinh(\mathbb{R})$.

On a donc : $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

20. Comme $\sinh'$ ne s'annule pas, Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, par le cours. De plus, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sinh'(\text{Argsh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\text{Argsh}(y))}.$$

Comme $\cosh(\text{Argsh}(y)) \geq 0$, on a, par 12,

$$\cosh(\text{Argsh}(y)) = +\sqrt{1 + \sinh^2(\text{Argsh}(y))} = \sqrt{1 + y^2}.$$

$$\text{Donc } \text{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

21. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout sur $\mathbb{R}$:

128

$$\sinh(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de $\uparrow$ est: $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$.

Donc

$$\sinh(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^x \\ x \in \left\{ y - \sqrt{y^2 + 1}; y + \sqrt{y^2 + 1} \right\}. \end{cases}$$

Par $y \in \mathbb{R}$, $|y|^2 < y^2 + 1$ donc $|y| < \sqrt{y^2 + 1}$

et $y < \sqrt{y^2 + 1}$ donc $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$.

Comme $e^x > 0$, on a

$$\sinh(x) = y \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

par la bij. de $\exp$.

Ex. 6 (TD9).

1 - f est C^1 par produit et composition. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2e^{(x^2)} + 2x e^{(x^2)} \times 2x = 2e^{(x^2)} (1 + 2x^2) \geq 1.$$

Donc f est str. $\nearrow$. Comme elle est conti., elle est, par le cours, bij. de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$, comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$ et

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^2 = +\infty$, on a, par produit et 129
Composition,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty.$$

On a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Par def. des
2 limites précédentes, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tq.

$$x > A \Rightarrow f(x) > y,$$

et

$$x < -B \Rightarrow f(x) < y.$$

$$\text{Dne } f(A+1) > y > f(-B-1).$$

Comme f est conti., $y \in f(\mathbb{R})$ par le Th. des val.
interm. Dne $\mathbb{R} \subset f(\mathbb{R})$. D'où $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

6.2. Comme $f' > 0$ partout, f^{-1} est partout
dérivable, par le cours. De plus, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2e^{(f^{-1}(y))^2}(1+2(f^{-1}(y))^2)}$$

Comme $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 0$ et

$$f^{-1}(0) = \frac{1}{2e^0(1+2 \times 0)} = \frac{1}{2}.$$