De même, on construit $P : \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[\to \mathbb{C}$

donnée par $\begin{cases} P_{n_0} = u_{n_0} \\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[,\ P_{n+1} = P_n \times u_{n+1} . \end{cases}$

Pour $n \geq n_0$, on note "pi".

$$P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k .$$

Pour $n \geq n_0$ et $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\prod_{k=n_0}^{n} (a u_k) = a^{n-n_0+1} \times \prod_{k=n_0}^{n} u_k .$$

Exercice : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

$\boxed{\text{Rappel } z^0 = 1 !}$

Rq. : pour $n = 2$, on reconnait l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Appl : Soit $r \in \mathbb{C}$ et $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ la suite arith. de raison r. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

$$= \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} u_\ell\right) + u_n - \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) = u_n - u_0$$

Donc

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} r = u_0 + r \times (n-1-0+1)$$

$$= u_0 + nr .$$

Soit $(u_0, r) \in (\mathbb{C}^*)^2$. La suite géom. de raison r et de 1er terme u_0 est la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r \times u_n$.

On vérifie par récu. que u est bien définie qu'elle ne s'annule pas.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \times \prod_{k=0}^{n-1} u_k = \prod_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \prod_{k=1}^{n} u_k$$
$$= u_0 \times \prod_{l=0}^{n-1} u_{l+1} = u_0 \times \prod_{l=0}^{n-1} (r u_l)$$
$$= u_0 r^{n-1-0+1} \underbrace{\left(\prod_{l=0}^{n-1} u_l\right)}_{\neq 0}$$

Donc, par simplification,

$$u_n = u_0 r^n.$$

Ex. 3.

1 – Soit u une suite arith. de raison r.

on devine :
- u est constante $\Leftrightarrow r = 0$.
- u est croissante $\Leftrightarrow r \geq 0$
- u est minorée $\Leftrightarrow r \geq 0$
- u est bornée $\Leftrightarrow r = 0$.

On montre : u est constante $\Leftrightarrow r = 0$.

Si $r = 0$, on a, par la formule précédente, $u_n = u_0$, pour tout n. Donc u est constante.

Si u est constante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$. Donc, pour $n = 1$, $u_0 + r \times 1 = u_0$. D'où $r = 0$.

On montre : u est $\nearrow \iff r \geq 0$. (u est réelle)

Si u est $\nearrow$, $u_1 \geq u_0$ donc, par la formule précé.,

$u_0 + r \geq u_0$ donc $r \geq 0$.

Si $r \geq 0$ et $m \geq n$, on a $u_m = u_0 + mr \geq u_0 + nr = u_n$

car $r \geq 0$, donc $u_m \geq u_n$. u est donc $\nearrow$.

On montre : u est minorée $\iff r \geq 0$. (u est réelle).

Si $r \geq 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn \geq u_0$.

Donc u est minorée (par u_0).

Si u est minorée, il existe $c \in \mathbb{R}$ tq. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq c$ donc $u_0 + rn \geq c$ soit $rn \geq c - u_0$.

Supposons $r < 0$. Soit $N = E\left(\frac{|c-u_0|}{-r}\right)$. On a

$$N \leq \frac{|c-u_0|}{-r} < N+1$$

donc $r(N+1) < -|c-u_0| < c - u_0$. Contr. avec

pour $n = N+1$.

On montre : u est bornée $\iff r = 0$.

Si $r = 0$, u est constante donc bornée.

Supposons u bornée. Comme u est minorée, $r \geq 0$, par l'équiv. précédente. Supposons $r > 0$. Soit M un majorant de u. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + rn \leq M \leq |M| + |u_0|$$

Donc, $rn \leq |M| + |u_0| - u_0 \leq |M|$ et $n \leq \frac{|M|}{r}$.

Contr. car il existe $n \in \mathbb{N}$ tq. $n > \frac{|M|}{r}$ (par exemple $n = E\left(\frac{|M|}{r}\right) + 1$).

2 — voir tableau → annexe 1.