2 –

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite géom. de raison $q \in \mathbb{R}$.

On montre :

u est constante $\overset{(1)}{\iff} \big((u_0 = 0) \text{ ou } (u_0 \neq 0 \text{ et } q = 1) \big)$.

u est $\searrow$ $\overset{(2)}{\iff} \big((u_0 = 0) \text{ ou } (u_0 > 0 \text{ et } q \in [0;1]) \text{ ou } (u_0 < 0 \text{ et } q \geq 1) \big)$

u est bornée $\overset{(3)}{\iff} \big((u_0 = 0) \text{ ou } (|q| \leq 1) \big)$

u est maj. $\overset{(4)}{\iff} \big((u_0 = 0) \text{ ou } (|q| \leq 1) \text{ ou } (u_0 < 0 \text{ et } q \geq 1) \big)$.

(1) : $\Leftarrow$). Si $u_0 = 0$, u est cte égale à 0.
Si $u_0 \neq 0$ et $q = 1$, u est cte égale à u_0.

$\Rightarrow$). Soit u cte. Supposons $u_0 \neq 0$. Donc $\frac{u}{u_0}$ est cte $\neq 0$. Par la formule préc., $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est cte.

Si $q > 1$, $q^2 > q$. Contr.

Si $q < 0$, $q^2 > 0 > q$. Contr.

Si $0 < q < 1$, $q^2 < q$. Contr.

Si $q = 0$, $q^0 = 1 \neq q^1 = 0$. Contr.

Donc $q = 1$.

(2) $\Leftarrow$). Si $u_0 = 0$, u est cte donc $\searrow$.
Si $u_0 > 0$ et $q \in [0;1]$, (q^n) est $\searrow$
car, pour $m \geq n$, on a
$$q^m = \underbrace{q^{m-n}}_{\leq 1} \times q^n \leq q^n.$$
Comme $u_0 \geq 0$, u est $\searrow$.

Si $u_0 < 0$ et $q \geq 1$. (q^n) est $\nearrow$ car
pour $m \geq n$, $q^m = \underbrace{q^{m-n}}_{\geq 1} \times q^n \geq q^n$.
D'où u est $\searrow$.

à détailler avec brouillon.

(2) $\Rightarrow$) : Prenons $u \downarrow$.

On suppose $u_0 \neq 0$.

1er cas : $u_0 > 0$. Si $q > 1$, (q^n) str. $\nearrow$ donc u est str. $\nearrow$, Contr.

Donc $q \leq 1$. Si $q < 0$, on a

$$u_2 = u_0 q^2 > 0 > \underset{u_1}{\underset{\parallel}{u_0 q}}. \text{ Contr. Donc } q \geq 0.$$

2è cas : $u_0 < 0$. Si $q = 0$, $u_1 = 0 > u_0$ Contr.

Si $q < 0$, $u_1 = u_0 q > 0 > u_0$. Contr.

Si $0 < q < 1$, $(q^n)_n$ est str. $\downarrow$. Comme $u_0 > 0$, u est str. $\nearrow$. Contr.

D'où $q \in [1 ; +\infty[$.

(3) : $\Leftarrow$). Si $u_0 = 0$, u est cte donc bornée.

Si $|q| \leq 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|u_n| = |u_0 q^n| = |u_0| \, |q|^n \leq |u_0|$. Donc u est bornée.

$\Rightarrow$) Prenons u bornée. Supposons $u_0 \neq 0$.

Si $|q| > 1$ alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$|u_n| = |u_0| \times |q|^n$. Donc $(|q|^n)$ est maj. par un certain $M > 0$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $|q|^n \leq M$ donc

$n \ln|q| \leq \ln M$. Contr. pour $n > E\left(\frac{\ln M}{\ln|q|}\right)$.

(4) : $\Leftarrow$). Si $u_0 = 0$, u est cte donc maj.

Si $|q| \leq 1$ alors u est bornée (cf. (3)) donc u est maj.

Si $u_0 < 0$ et $q \geq 1$, on a $u_n \leq 0$ pour tout n. Donc u est maj.

$\Rightarrow$) Prenons u maj, On peut toujours trouver un maj. $M > 0$.

Supposons $u_0 \neq 0$.

<u>1er cas</u> : $u_0 > 0$. Si $|q| > 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$|q|^{2n} = q^{2n} = \frac{u_{2n}}{u_0} \leq \frac{M}{u_0} \quad (\text{car } u_0 > 0).$$

<u>Contr.</u> (cf. logarithme). Donc $|q| \leq 1$.

<u>2è cas</u> : $u_0 < 0$. Si $q \leq -1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$M \geq u_{2n+1} = u_0 q^{2n+1} = \underbrace{u_0 q}_{>0} |q|^{2n}.$$

<u>Contr.</u> (cf. logarithme). Donc, soit $|q| \leq 1$

soit $q > 1$.

<u>Ex. 4</u> :

1.(i) $\exists c \in \mathbb{C}$; $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow u_n = c$.

(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0$.

(iii) $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2$,

$$m \geq n \geq N \Rightarrow u_m \geq u_n.$$

2. Si u est bornée, elle est bornée à partir du rang 0.

Si u est bornée à partir du rang N, il existe $M > 0$ tq.

$$n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq M.$$

Soit $M_1 = \max(|u_0|; \dots; |u_N|)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq M_1 \leq \max(M; M_1) \text{ si } n \leq N$$

et

$$|u_n| \leq M \leq \max(M; M_1) \text{ si } n \geq N.$$

Donc u est bornée.

Ex. 5

(i). $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$

(ii). $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$0 \longmapsto 0$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto 0$$
$$n \longmapsto 10^{387} \text{ si } n \geq 3.$$

(iii) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(iv) $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ex. 6. :

1.a). deviner q et ℓ :

$$a u_n + b = u_{n+1} = \ell + q(u_n - \ell)$$

$$(a-q)\underbrace{u_n}_{\text{varie a priori}} = \underbrace{(1-q)\ell - b}_{\text{fixe.}}$$

on choisit $a = q$ et $(1-q)\ell = b$

Comme $a \neq 1$, $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Soit $q=a$ et $\ell = \frac{b}{1-a}$,

Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}-\ell = au_n+b-\ell = au_n+\ell(1-a)-\ell$$
$$= au_n - a\ell = a(u_n-\ell) = q(u_n-\ell).$$

b). - On peut procéder par récurrence.
- on peut aussi utiliser les sommes

1ère version : Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(u_n=\ell+q^n(u_0-\ell)\right)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\ell+q^0(u_0-\ell)=u_0$.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. On a, par a),

$$u_{n+1} = \ell+q(u_n-\ell) \underset{\text{H.R.}}{=} \ell+q\left(q^n(u_0-\ell)\right)$$
$$= \ell+q^{n+1}(u_0-\ell).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2e version : idée $m\in\mathbb{N}^*$.

$$u_m-\ell = q(u_{m-1}-\ell)$$
$$u_{m-1}-\ell = q(u_{m-2}-\ell) \leftarrow \times q$$
$$u_{n+1}-\ell = q(u_n-\ell) \leftarrow \times q^{m-n-1}$$
$$u_1-\ell = q(u_0-\ell) \leftarrow \times q^{m-1}$$

puis additionner

beaucoup de termes se simplifient

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{n=0}^{m-1} q^{m-n-1}(u_{n+1}-\ell) - \sum_{n=0}^{m-1} q^{m-n}(u_n-\ell)$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} q^{m-n-1}\left[(u_{n+1}-\ell)-q(u_n-\ell)\right] = 0,$$

d'après a). Donc

$$0 = \sum_{k=1}^{m} q^{m-k}(u_k-\ell) - \sum_{k=0}^{m-1} q^{m-k}(u_k-\ell)$$

$$= u_m-\ell + \cancel{\sum_{k=1}^{m-1} q^{m-k}(u_k-\ell)} - \cancel{\sum_{k=1}^{m-1} q^{m-k}(u_k-\ell)} - q^m(u_0-\ell)$$

Donc

$$u_m = \ell + q^m(u_0-\ell).$$

De plus, pour $m=0$, cette égalité est aussi vraie,

c). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par b) et en utilisant $q=a$ et $\ell = \frac{b}{1-a}$,

$$u_n = \ell + q^n(u_0-\ell) = a^n u_0 + \ell(1-a^n) = a^n u_0 + b\,\frac{1-a^n}{1-a}.$$

2. On applique le résultat précédent avec $a=2 \neq 1$ et $b=3$. Par 1, c), on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = 2^n u_0 + 3\,\frac{1-2^n}{1-2} = 2^{n+1} + 3(2^n-1)$$

$$= 5 \times 2^n - 3.$$

Preuve de : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Détailler les th. de récu.] ✓.

$u \nearrow$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$.

Preuve de la formule, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

— On peut procéder par récu.

— Alternative : On a

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a^l b^{n-l} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n b^{n-n} + \cancel{\sum_{l=1}^{n-1} a^l b^{n-l}} - \cancel{\sum_{l=1}^{n-1} a^l b^{n-l}} - a^0 b^{n-0}$$

$$= a^n - b^n.$$

<u>Exercise</u> : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : [n_0;+\infty[\cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence :

$$(u \text{ est } \nearrow) \iff (\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0;+\infty[,\ u_{n+1} \geq u_n).$$

$\Rightarrow$). Prenons $u \nearrow$. Pour $n \geq n_0$, on a $m = n+1 \geq n$ donc, par la croissance de u, $u_{n+1} = u_m \geq u_n$.

$\Leftarrow$). On suppose que, pour $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Soit $m \geq n \geq n_0$. On montre que $u_m \geq u_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{P}(p) = \left(u_{n+p} \geq u_n \right).$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \in \mathbb{N}$. Alors, par l'hyp. et l'hyp. de récurrence,

$$u_{n+p+1} \geq u_{n+p} \geq u_n.$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le th. de récu., $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc en particulier pour $p = m-n$. D'où

$$u_m = u_{n+(m-n)} \geq u_n.$$

✓

Limites de suites.

Quelques remarques sur la définition.

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, soit

$$Q(N;\varepsilon) = \left(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \right)$$

Rq. : dire que $Q(N;\varepsilon)$ est vraie revient à dire que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est vraie à partir d'un certain rang.

Montrer que, si $N_1 \geq N$ et $\varepsilon_1 \geq \varepsilon$ alors

$$Q(N;\varepsilon) \Rightarrow Q(N_1;\varepsilon_1).$$