

122

Supposons $Q(N; \varepsilon)$ vraie. On montre
 que $Q(N_1; \varepsilon_1)$ est vraie. Soit
 Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq N_1$. Comme
 $N_1 \geq N$, on a aussi $m \geq N$. Donc,
 d'après $Q(N; \varepsilon)$, on a $|u_m - l| < \varepsilon$.
 Or $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ donc $|u_m - l| < \varepsilon_1$.
 Donc $Q(N_1; \varepsilon_1)$ est vraie.

Morale: la validité de $Q(N; \varepsilon)$
 est préservée si l'on augmente
 N et/ou ε .

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_0 > 0$. Montrer l'équivalence

$$\mathcal{P} = \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon) \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_0 = \left(\forall \varepsilon \in]0; \varepsilon_0]; \exists N \in \mathbb{N} \cup [N_0; +\infty[; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon) \right)$$

Preuve :

$\Rightarrow$). On suppose $\mathcal{P}$ vraie. On montre $\mathcal{P}_0$.
 Soit $\varepsilon \in]0; \varepsilon_0]$. D'après $\mathcal{P}$, il existe $N \in \mathbb{N}$

t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$. (*)

Soit $N_1 = \max(N, N_0) \geq N_0$. Par (*), pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $Q(N; \varepsilon)$ est vraie. Par le résultat

précédent, $Q(N_1; \varepsilon)$ est aussi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dne il existe $N_1 \geq N_0 \vdash \gamma$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Dne $\mathcal{P}_0$ est vraie.

$\Leftarrow$). On supp. $\mathcal{P}_0$ vraie. On montre $\mathcal{P}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon; \varepsilon_0) \in]0; \varepsilon_0]$.
Par $\mathcal{P}_0$, il existe $N \geq N_0 \vdash \gamma$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon_1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(N; \varepsilon_1)$ est vraie. D'après le résultat précédent, $Q(N; \varepsilon)$ est aussi vraie car $\varepsilon \geq \varepsilon_1$. Dne, il existe $N \in \mathbb{N} \vdash \gamma$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Dne $\mathcal{P}$ est vraie.

Interprétation :

* Pour valider $\mathcal{P}$, il suffit d'avoir

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = (\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon))$$

vraie pour ε petit. (prendre $N_0 = 0$)

* Si $\mathcal{P}$ est vraie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

est vraie pour un N gd.

Pour montrer $\mathcal{P}$, on cherche à vérifier

$|u_n - l| < \varepsilon$ pour n assez gd.

Exercice : Soit $c \in \mathbb{R}$.

24

Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto c$.

Soit $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(v_n = u_n)$ à partir d'un certain rang (v est stationnaire).

Montrer avec la définition que :

$\lim u = c = \lim v$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ et

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

$\lim u = c$: On montre : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - c| < \varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a
 $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

$\lim v = c$: Par hyp. il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q., pour $n \geq N_0$,
 $v_n = u_n = c$. On montre :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n - c| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N = N_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$,
on a $|v_n - c| = |c - c| < \varepsilon$.

$\lim \frac{1}{n} = 0$: On montre : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
 $(n \geq N \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on cherche un rang à partir duquel
 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ est vraie. Or
 $|\frac{1}{n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$.
Donc $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ est vraie à partir du rang
 $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

On a $N > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \text{d. Ex. 2}$$

De manière similaire, on montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(pour $\varepsilon > 0$ donné, prendre par exemple $N = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$).

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$: On montre : $\forall A > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n > A)$.

Soit $A > 0$. On choisit $N = E(A) + 1$. On a

$N > A$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ on a,

$$n \geq N > A.$$

Ex. 2 : 2. (i). La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie car u ne s'annule pas.

On a par hyp. :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon).$$

$$R_g : |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < u_n < \varepsilon.$$

On veut :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \frac{1}{u_n} > A).$$

$$R_g : \frac{1}{u_n} > A \Leftrightarrow \frac{1}{A} > u_n \quad (\text{car } u_n > 0)$$

on va utiliser (1) pour $\varepsilon = \frac{1}{A}$.

On montre: $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} > A)$. [26]

Soit $A > 0$. Par hyp., il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \frac{1}{A}).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a donc $|u_n| < \frac{1}{A}$.

Comme $u_n > 0$, on a $0 < u_n < \frac{1}{A}$ et $A < \frac{1}{u_n}$.

Ex. 1: on utilise au maximum le résultat sur les op. sur les limites. Attention aux "formes indéterminées".

(0): $u_n = \frac{3}{2 + \frac{1}{n}}, n > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ on a, par somme, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2 \neq 0$

Drc, on a, par inversion, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$, on a, par produit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$.

(i) $\left(\begin{array}{l} \text{forme indéterminée car } \lim u = +\infty \\ \text{et } \lim u+1 = +\infty, \\ \text{on écrit, pour } n \neq 0, a_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{array} \right).$

Pour $n > 0$, on a

$$a_n = \frac{n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

par les op. sur les limites.

(ii) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$, par produit, et $\lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = +\infty$, par somme, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, par inversion.

(iii) (forme indéterminée.
on écrit $C_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\rightarrow 1}$)

27

Pour $n > 0$, on a

$$C_n = \frac{n}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\rightarrow 1 \neq 0 \text{ } n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

par les opé. sur les limites.

(iii)' $\tilde{C}_n = \frac{n \sin(\frac{1}{n})}{n^2 + 1}, n > 0.$

Pour $n > 0$, on a

$$\tilde{C}_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\sin(\frac{1}{n})}_{\text{lim. ??}} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\rightarrow 1} \quad \checkmark$$

Comme $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$, on a, par le th. des gendarmes, $\lim \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) = 0$.

Donc, par produit, $\lim \tilde{C}_n = 0$.

(iii)'' $\hat{C}_n = \sqrt{n}$.

(on devine que $\lim \hat{C}_n = +\infty$.

→ on peut utiliser la déf.

→ on peut aussi utiliser le fait que $(\hat{C}_n)$ est $\uparrow$ et une s.suite appropriée

Comme $\sqrt{\cdot}$ est une fct ch $\uparrow$, $(\hat{C}_n)_n$ est $\uparrow$. Par le cours,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{C}_n$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_2$. Elle est str. $\uparrow$. Donc $(\hat{C}_{\varphi(n)})_n$ est une suite extraite de $(\hat{C}_n)_n$.