Par le cours, $\ell = \lim_{n\to\infty} \hat{C}_{\varphi(n)}$.

Or, pour tout n, $\hat{C}_{\varphi(n)} = \sqrt{n^2} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Donc $\ell = +\infty$ et $\lim \hat{C}_n = +\infty$.

(iv). Pour $n>0$,

$$d_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ d'après le résultat précédent.

$1-\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$ par somme

$1+\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1 \neq 0$ par somme

Donc, par quotient, $\lim d_n = \frac{1}{1} = 1$.

(vi) (forme indéterminée car
$\sqrt{n(n+1)} \geq \sqrt{n} \to +\infty$
donc $\lim \sqrt{n(n+1)} = +\infty$ (gendarmes)
et $\lim n = +\infty$.)

Pour $n>0$, on a

$$f_n = \frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+1)} + n\right)}{\sqrt{n(n+1)} + n} = \frac{n(n+1) - n^2}{\sqrt{n(n+1)} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n(n+1)} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2} + 1} \quad (*)$$

On montre que $\lim \sqrt{1+1/n^2} = 1$. Pour $n>0$,

$$\sqrt{1+1/n^2} - 1 = \frac{1+\frac{1}{n^2}-1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+1/n^2}+1\right)}$$

donc $\left|\sqrt{1+1/n^2} - 1\right| \leq \frac{1}{n^2} \to 0$. Donc par le Th. des gendarmes $\lim \sqrt{1+1/n^2} = 1$. Par les opé. sur les limites et $(*)$, $\lim f_n = \frac{1}{2}$.

Exemple : $u = \left((-1)^n\right)_n$ (On démontre que la limite n'existe pas.)

Supp. que $\ell = \lim u$ existe. Alors, par le cours, $\lim u_{2n} = \ell$ et $\lim u_{2n+1} = \ell$. Or, pour tout n, $u_{2n} = 1 \to 1$, $u_{2n+1} = -1 \to -1$ $\neq$.

Contra. Donc $\lim u$ n'existe pas.

Complément : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0.$$

Preuve : $\Rightarrow$). Fait en cours.

$\Leftarrow$). On montre

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp. il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \big|\,|u_n| - 0\big| < \varepsilon). \quad (*)$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a, par $(*)$,

$$|u_n - 0| = \big|\,|u_n| - 0\big| < \varepsilon.$$

Suite de l'ex. 1 (TD2).

$$(h_n)_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n>0}$$

(On ne peut pas utiliser les opérations sur les limites car $\lim (-1)^n$ n'existe pas.
En revanche : $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ ou $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$
avec $\lim \frac{1}{n} = 0$.)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Par le Th. des gendarmes, $\lim \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0$.

Par le résultat précédent, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

$(\ell_n)_n = \left((-1)^n \frac{n+1}{n}\right)_{n>0}$

on ne peut utiliser les opé sur les limites car $\lim (-1)^n$ n'existe pas.
On devine que la limite n'existe pas.
→ on peut utiliser des sous-suites
→ on peut utiliser le fait que $\lim (-1)^n$ n'existe pas.

1ère version : On suppose que $\ell = \lim \ell_n$ existe.
Alors $\ell = \lim \ell_{2n}$ et $\ell = \lim \ell_{2n+1}$.
Or, pour $n>0$, on a

$$\ell_{2n} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

et

$$\ell_{2n+1} = -\frac{2n+2}{2n+1} = -\frac{2n}{2n}\,\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}} = -\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}} \quad \begin{matrix} \to 1 \\ \to 1 \neq 0 \end{matrix}$$

$\longrightarrow -1$,

par les opérations sur les limites. D'où
$1 = \ell = -1$. Contr.

2è version (sachant que $\lim (-1)^n$ n'existe pas).
Pour $n>0$, on a $\frac{n}{n+1}\ell_n = (-1)^n$

et $(-1)^n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \ell_n$. $\qquad 0 \neq 1$

Si $\ell = \lim \ell_n$ existe alors, par produit, $\lim (-1)^n$ existe et vaut $1 \times \ell = \ell$. Contr.
Donc $\lim \ell_n$ n'existe pas.

31

$(q_n)_n = \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_n$.

(On devine que $\lim q_n$ n'existe pas)

Soit $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 3n$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 3n+1$.

Elles sont bien déf. et str. ↗.

Si $\ell = \lim q_n$ existe alors, par le cours,

$\ell = \lim q_{\varphi_1(n)} = \lim q_{\varphi_2(n)}$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$q_{\varphi_1(n)} = \sin\left(\frac{2(3n)\pi}{3}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

et

$q_{\varphi_2(n)} = \sin\left(\frac{2(3n+1)\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Donc $0 = \ell = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Contra.

Donc $\lim q_n$ n'existe pas.

Rq. : dans les autres cas, on trouve

$\lim e_n = \frac{1}{2}$; $\lim g_n = \lim i_n = \lim j_n = \lim k_n = 0$;

$\lim m_n = +\infty$; $\lim o_n = \frac{1}{2}$; $\lim p_n = +\infty$;

et $\lim r_n$ n'existe pas.

✓