

Ex. 4 (TD2)

32

(i) : Vrai.

Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ convergent vers l .

Soit $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue en modifiant un nb. fini de termes de u . Soit N_0 le plus indice d'un terme modifié. Dne la prop. $(u_n = v_n)$ est vraie à partir de $N_0 + 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N > N_0$ tq.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

(on a vu qu'on peut imposer la condition $N > N_0$).

Par $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a donc

$$|v_n - l| = |u_n - l| < \varepsilon.$$

D'où $\lim v_n = l = \lim u_n$.

(ii) : Faux. Contre-exemple :

$$u = \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \right)_n, \quad \text{On a } \lim u = 0$$

(cf. le traitement de (h_n) de l'ex. 1).

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$.

(iii) Vrai. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tq.

$l = \lim u$ existe.

(on devine que $u_n = l$ à partir d'un certain rang et que $l \in \mathbb{Z}$.)

D'après la déf. de $l = \lim u$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq,

133

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{1}{2}.$$

Donc, pour $n \geq N$, $u_n \in]l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$.

Comme cet intervalle est de longueur $= 1$ et est ouvert, il contient un seul élé. $c \in \mathbb{Z}$.
($c = [l - \frac{1}{2}] + 1$).

Pour $n \geq N$, $u_n = c$. Donc u est stationnaire
(et $l = \lim u = c$).

(iv) Faux. Contre-exemple: $u = (\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{1}{n+1} > 0$.

De plus, pour $n > 0$,

$$\frac{1}{n+1} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0$$

par les opérations sur les limites, donc $\lim u = 0$.

(v) Vrai. Cela résulte de la prop. 1.5.1. du cours.

(vi) Faux. Contre-exemple: $u = ((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour tout n , $u_{2n} = 2n \rightarrow +\infty$.

En particulier, u n'est pas majorée.

Pour tout n , $u_{2n+1} = -(2n+1) \rightarrow -\infty$.

Si $\lim u$ existait on aurait, par le cours,
 $+\infty = \lim u_{2n} = l = \lim u_{2n+1} = -\infty$. Contr.

Dne limite n'existe pas.

(vii): Vrai.

$$\left(\begin{array}{l} \text{idée} \\ |v_{n+1} - v_n| = |v_{n+1} - l + l - v_n| \\ \leq \underbrace{|v_{n+1} - l|} + \underbrace{|l - v_n|} \end{array} \right) \quad \text{petits pour n gd.}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon/2). \quad (*)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a

$$|v_{n+1} - v_n| = |v_{n+1} - l + l - v_n| \leq |v_{n+1} - l| + |l - v_n| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

par (*). Dnc $\lim v_{n+1} - v_n = 0$.

Autre preuve: Comme $l = \lim v_n$ existe et

Comme $(v_{n+1})_n$ est une s.suite de v ,

(d'extractrice : $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n+1$)

on a, par le cours, $\lim v_{n+1} = l$.

Dnc, par différence, $\lim v_{n+1} - v_n = 0$.

(viii): Vrai. Soit $l = \lim w_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $(w_n + x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors, par différence, $\lim x_n = l' - l \in \mathbb{R}$. Cntr. car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

(ix): Faux. Contre-exemple.

135

Soit $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$ et $n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$

On a $(y_{2n})_n = (2n)_n \rightarrow +\infty$ et $(z_{2n+1})_n = (2n+1)_n \rightarrow +\infty$.

Si y convergerait vers un $l \in \mathbb{R}$, on aurait, par le cours, $l = \lim y_{2n} = +\infty$, Contr.

Donc y diverge. De m. z diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $(y_n z_n)_n = (0)_n \rightarrow 0$.

(x): Faux. Cf. le contre-exemple précédent.

(xi): Vrai. On supp. qu'il existe $M > 0$ t.s.

$\forall n \in \mathbb{N}, |n c_n| \leq M$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|c_n| \leq \frac{M}{n} \rightarrow 0.$$

Donc, par le Th. des gendarmes, $\lim |c_n| = 0$
et $\lim c_n = 0$.

(xii): Faux. Contre exemple: $d = (-1)^n$.

On a vu que d n'a pas de limite.

De plus, pour tout n , $|d_n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Exercice 3 : version du TD2.

36

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

2-a). D'après la définition de $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$,
il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - 0 \right| < \frac{1}{2})$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{2}$$

donc :

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$$

b). Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = (|u_n| \leq 2^{n_0-n} |u_{n_0}|)$.

$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie car $|u_{n_0}| = 2^{n_0-n_0} |u_{n_0}|$.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$.

Par 2.0) avec n remplacé par $n+1$, on a

$$|u_{(n+1)+1}| \leq \frac{|u_{n+1}|}{2} \stackrel{\text{H.R.}}{\leq} \frac{1}{2} 2^{n_0-n} |u_{n_0}| = 2^{n_0-(n+1)} |u_{n_0}|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de réc.,
 $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

3. Pour $n \geq n_0$, on a
 $2^{n_0-n} = 2^{n_0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$ (cf. cours).
Par le th. des gendarmes et $\mathcal{P}(n)$, par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Ex. 3 : deuxième version.

(37)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \frac{a^n}{n!}$.

1. Montrer que $|u|$ est $\downarrow$ à partir d'un certain rang.

2. En déduire que $\lim |u| = 0$.
(on part de $\lim u = 0$).

1. Soit $N = [|a|] + 1$. On a $|a| \leq N$.

Pour $n \geq N$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N} \leq 1.$$

Donc $(|u_n|)_n$ décroît à partir du rang N .

2. Par le cours, $l = \lim |u_n|$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \geq 0$$

on a, par passage à la limite dans ces inégalités $l \geq 0$.

Comme $(|u_{n+1}|)_n$ est une s. suite de $(|u_n|)_n$,

$l = \lim |u_{n+1}|$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} = |u_n| \times \frac{|a|}{n+1}$$

donc, par produit, $l = l \times 0$ soit $l = 0$.

Ex. 5:

138

1-a). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - l + l) \\&= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^n (u_k - l) + \sum_{k=0}^n l \right] \\&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - l) + \frac{1}{n+1} \times l \times n+1\end{aligned}$$

$$d(\bar{u}_n - l) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) - l = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - l).$$

b). Soit $\varepsilon' > 0$. Par hyp., $\lim u = l$
donc, pour $\varepsilon' > 0$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tq.
 $n \geq N' \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon'.$

Donc, pour $n \geq N'$ et $n \geq k \geq N'$, on a

$$|u_k - l| < \varepsilon' \text{ d'où}$$

$$\sum_{k=N'+1}^n |u_k - l| < (n - (N'+1) + 1) \varepsilon' = (n - N') \varepsilon'.$$

c). Soit $M = \max(|u_0 - l|; \dots; |u_{N'} - l|).$

On a, pour $0 \leq k \leq N'$, $|u_k - l| \leq M$ donc

$$\sum_{k=0}^{N'} |u_k - l| \leq M \times (N' - 0 + 1) = M \times (N' + 1).$$

d). Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
 |v_n - l| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - l \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - l) \right| \quad \leftarrow \text{N'a choisir!} \\
 &= \left| \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{N'} (u_k - l) + \sum_{k=N'+1}^n (u_k - l) \right) \right| \\
 &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N'+1}^n |u_k - l| \\
 &\quad \downarrow \text{d. c)} \quad \downarrow \text{d. b)} \\
 &\leq \frac{1}{n+1} \times (N'+1)M + \frac{1}{n+1} \times (n - N')\varepsilon' < \varepsilon \\
 &\quad < \frac{\varepsilon}{2} ? \quad \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2} ?
 \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Par b), il existe $N' \in \mathbb{N} \forall \varepsilon'$.

$$n > N' \Rightarrow \sum_{k=N'+1}^n |u_k - l| < (n - N')\varepsilon'. \quad (1)$$

Par c), il existe $M > 0 \forall \varepsilon$.

$$\sum_{k=0}^{N'} |u_k - l| \leq (N'+1)M. \quad (2)$$

Comme la suite $\left(\frac{(N'+1)M}{n+1} \right)_n$ tend vers 0, il existe $N \geq N' \forall \varepsilon$.

$$n \geq N \Rightarrow 0 < \frac{(N'+1)M}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a, par a),

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - l| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N'+1}^n |u_k - l|$$

et, par (1) et (2),

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} (N'+1)M + \frac{1}{n+1} (n - N') \varepsilon' \leq 1$$

140

donc

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} (N'+1)M + \varepsilon' = \frac{1}{n+1} (N'+1)M + \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par (3),

$$|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\lim v_n = l$.

2- Soit $A > 0$.

idée :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} u_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N'+1}^n u_k$$

choisir N' pour avoir $\uparrow \geq 3A$

$$\geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} u_k + \frac{n - N'}{n+1} \times 3A$$

petit > 1

choisir $N \geq N'$ tq. pour $n \geq N$,

$$\frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N'} u_k \right| < A \text{ et } \frac{2}{3} < \frac{n - N'}{n+1} < 1 + \frac{1}{3}$$

Par hyp., il existe $N' \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N' \Rightarrow u_n > 3A. \quad (1)$$

Par produit, la suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} u_k \right)_n$ tend vers 0

donc il existe $N_1 \geq N'$ tq.

$$n \geq N_1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N'} u_k \right| < A. \quad (2)$$

Come, pour $n > 0$,

41.

$\frac{n-N'}{n+1} = \frac{1 - N'/n}{1 + 1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ par les opé. sur les limites, il existe $N_2 \geq N_1$ tq.

$$n \geq N_2 \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{n-N'}{n+1} < \frac{4}{3}. \quad (3)$$

Soit $N = \max(N_1, N_2) \geq N'$. Par $n \geq N$, on a

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} u_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N'+1}^n u_k$$

$$\geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N'} u_k + \frac{n-N'}{n+1} 3A \quad \text{par (1)}$$

$$\geq -A + \frac{n-N'}{n+1} 3A \quad \text{par (2) car } n \geq N \geq N_1$$

$$\geq -A + \frac{2}{3} \times 3A = A. \quad \text{par (3) car } n \geq N \geq N_2$$

On a montré que $\lim v_n = +\infty$.

3- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{3n-2}{2n+3} = \frac{3 - 2/n}{2 + 3/n} \rightarrow \frac{3}{2}$$

par les opé. sur les limites. En appliquant le 1), on a $\lim v_n = \frac{3}{2}$. Or $v = w$ donc $\lim w = \frac{3}{2}$.

4- Question supplémentaire: Soit $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\lim v$ existe-t-elle? Si oui la calculer?

(on devine que $\lim v = 0$).

On montre par réc. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_{2n} = 0, \\ v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}. \end{cases}$

on vérifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.

Par le th. des gendarmes, on conclut que $\lim v = 0$.

Suites extraites ou sous-suites :

42

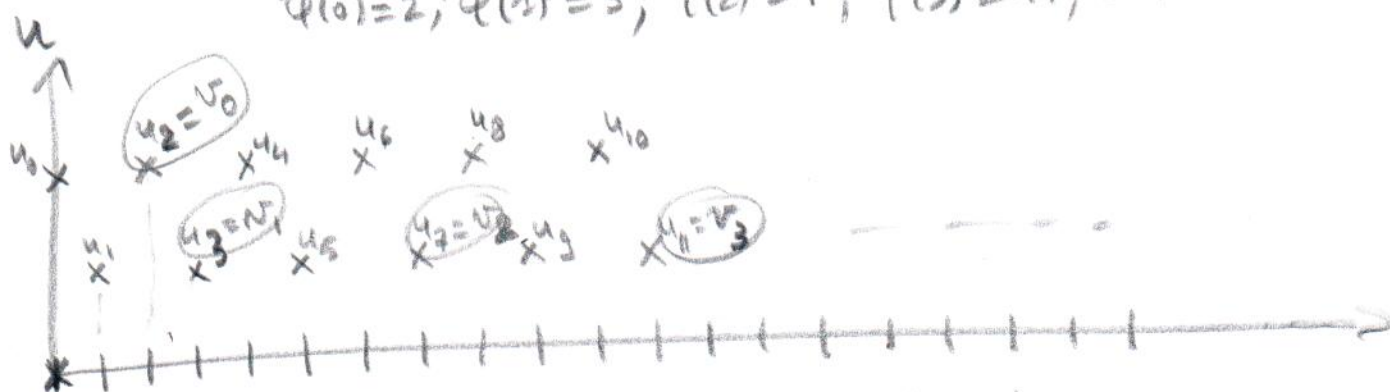
Rappel : Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Une suite $v : D' \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une
suite extraite (ou sous-suite) de u s'il
existe $\varphi : D' \rightarrow D$ str. $\nearrow$ tg.

$$\forall n \in D', \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Le plus souvent, on a $D' = D = \mathbb{N}$.

Interprétation graphique : $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $u(0)=2; u(1)=3; u(2)=7; u(3)=11; \dots$



Les termes successifs de v sont obtenus de ceux
de u en rayant les u_n pour $n \notin \text{Im } \varphi$.

Ex. :
d'extraits

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ est str. } \nearrow$$

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ est str. } \nearrow$$

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ est str. } \nearrow$$

(idem avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$
 $n \mapsto n+1$)
(idem avec
 $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$
 $n \mapsto n+1$)

Req. : Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sont str. $\nearrow$
il en est de même de $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.