Ex. 3 (TD3).

(i). Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$.

Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$ est str. $\nearrow$, u est une s. suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii). (on devine que la réponse est non).

Si v était une s.-suite de u d'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on aurait

$\varphi(0)^2 = v_0 = 4$ donc $\varphi(0) = 2$ ((car $\varphi(n) \in \mathbb{N}$)

$\varphi(1)^2 = v_1 = 9$ donc $\varphi(1) = 3$

$\varphi(2)^2 = v_2 = 4$ donc $\varphi(2) = 2$,

Soit $\varphi(0) = \varphi(2)$. Contr. avec la str. $\nearrow$ de φ.

Donc v n'est pas une s. suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii). ($w_n = (2n-3)^2$ $\to w_0 = 9$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$

Si $w_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout n, $\varphi(0)^2 = w_0 = 9 \to \varphi(0) = 3$

$\varphi(1)^2 = w_1 = 1 \to \varphi(1) = 1$

φ n'est pas str. $\nearrow$.)

Si w était une sous-suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ d'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on aurait

$(\varphi(0))^2 = w_0 = 9$ donc $\varphi(0) = 3$

et $(\varphi(1))^2 = w_1 = 1$ donc $\varphi(1) = 1 < \varphi(0)$. Contr.

Donc w n'est pas une s. suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) ($(\varphi(0))^2 = x_0 = 0 \to \varphi(0) = 0$

$(\varphi(1))^2 = x_1 = 0 \to \varphi(1) = 0$?!)

Si x était une s. suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ d'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on aurait

$(\varphi(0))^2 = x_0 = 0$ donc $\varphi(0)$ et

$(\varphi(1))^2 = x_1 = 1$ donc $\varphi(1) = 0 = \varphi(0)$.

Contr. avec la str. $\nearrow$ de φ.

Donc x n'est pas une s. suite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 4 :

1 -

$u_{2n} \to \ell_1$; $u_{2n+1} \to \ell_2$; $u_{3n} \to \ell_3$

s. suite — s. suite — s. suite — s. suite

$(u_{6n})_n$ donc $u_{6n} \to \ell_1 = \ell_3$

$(u_{6n+3})_n$ donc $u_{6n+3} \to \ell_2 = \ell_3$

d'où $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$ et (u_{6n}) et (u_{6n+3}) ont m. limite

Soit $\ell_1 = \lim u_{2n}$, $\ell_2 = \lim u_{2n+1}$ et $\ell_3 = \lim u_{3n}$.

Pour $\varphi_1 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \underset{\text{str.}\nearrow}{\longmapsto} 3n \end{array}$, on a, pour tout n,

$u_{2\varphi_1(n)} = u_{6n}$ donc $(u_{6n})_n$ est une s. suite de $(u_{2n})_n$.

Pour $\varphi_2 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \underset{\text{str.}\nearrow}{\longmapsto} 2n \end{array}$, on a, pour tout n

$u_{3\varphi_2(n)} = u_{6n}$ donc (u_{6n}) est une s. suite de $(u_{3n})_n$.

Par le cours, $\ell_1 = \lim u_{6n} = \ell_3$.

Pour $\varphi_3 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto 3n+1 \end{array}$ str. $\nearrow$, on a, pour tout n,

$$u_{2\varphi_3(n)+1} = u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3}$$

donc $(u_{6n+3})_n$ est une s. suite de $(u_{2n+1})_n$.

Pour $\varphi_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$ str. ↗, on a, pour tout n,

$$u_{3\varphi_4(n)} = u_{3(2n+1)} = u_{6n+3}$$

donc $(u_{6n+3})_n$ est une s. suite de $(u_{3n})_n$.

Par le cours, $\lim u_{6n}$ existe et vaut l_1 et aussi l_3. Donc $l_1 = l_3$.
Par le cours, $\lim u_{6n+3}$ existe et vaut l_2 et aussi l_3. Donc $l_2 = l_3$.

Donc $\lim u_{6n} = l_1 = l_3 = l_2 = \lim 6_n+3 =: l$.

2 – Par 1, $\lim u_{2n} = l_1 = l = l_2 = \lim u_{2n+1}$.

3 – On montre que $\lim u = l$.
(c'est la seule limite possible puisque des s. suite de u tendent vers l.)

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_{2p} = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geq N_1 \implies |u_{2p} - l| < \varepsilon. \quad (1)$$

Comme $\lim u_{2p+1} = l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geq N_2 \implies |u_{2p+1} - l| < \varepsilon. \quad (2)$$

Soit $N = \max(2N_2+1; 2N_1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$.

Si n est pair, n s'écrit $2p$ avec $p \geq \frac{N}{2} \geq N_1$. Donc, par (1),

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Si n est impair, n s'écrit $2p+1$ avec $p \geq \frac{N-1}{2} \geq N_2$. Donc, par (2),

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On a montré que $\ell = \lim u$.

Rappels et complément sur les bornes sup. et inf. :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

→ Si A est maj. alors elle admet un plus petit maj. réel noté $\sup A \in \mathbb{R}$

→ Si A est non majorée dans $\mathbb{R}$, on convient que $\sup A = +\infty$.

→ Si A est minorée alors elle admet un plus grand mino. réel noté $\inf A \in \mathbb{R}$.

→ Si A est non minorée dans $\mathbb{R}$, on convient que $\inf A = -\infty$.

Caractérisations :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a :

$\ell = \operatorname{Sup} A \underset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ (ℓ majore A et il existe une suite d'élé. de A qui tend vers ℓ)

Soit $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On a :

$\ell' = \inf A \Leftrightarrow$ (ℓ' minore A et il existe une suite d'élé. de A qui tend vers ℓ').

<u>Convention</u> : on décide que $-\infty$ minore toute partie de $\mathbb{R}$ et que $+\infty$ majore toute partie de $\mathbb{R}$.

<u>Preuve de (1)</u> :

<u>1er cas</u> : $\ell = +\infty$.

$\Rightarrow$) On suppose $+\infty = \operatorname{Sup} A$, c'est-à-dire A non maj. dans $\mathbb{R}$. $+\infty$ majore A (Cf. convention). Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in A$ t.q. $u_n > n$ car A est non maj. dans $\mathbb{R}$. On a construit une suite $u : \mathbb{N} \to A$ d'élé. de A vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n$.

Comme $\lim n = +\infty$, on a $\lim u = +\infty$ par le Th. des gendarmes.

$\Leftarrow$) On suppose qu'il existe une suite d'élé. $(a_n)_n$ de A qui tend vers $+\infty$. On montre que A est non maj. dans $\mathbb{R}$.

S'il existait un maj. $M \in \mathbb{R}$ de A, on aurait

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq M$.

Par passage à la limite $n \to \infty$ dans les inég.

on aurait $\quad +\infty \leq M$. Contr. avec la convention.

Donc A est non majorée.

<u>$2^{\text{è}}$ cas</u> : $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$). On suppose que $\ell = \sup A$. Par déf.,

ℓ est un majorant de A. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$\ell - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un maj. de A car $\ell - \frac{1}{n+1} < \ell$

et ℓ est le plus petit maj. de A. Il existe

donc un $u_n \in A$ tq. $u_n > \ell - \frac{1}{n+1}$

On a ainsi construit une suite $u : \mathbb{N} \to A$

d'élé. de A qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - \frac{1}{n+1} < u_n \leq \ell.$$

car ℓ maj. A donc tous les élé. de A.

Comme $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim u_n = \ell$

par le Th. des gendarmes.

$\Leftarrow$) On supp. que ℓ maj. et qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'élé. de A qui tend vers ℓ.

On montre que ℓ est le plus petit maj. de A.

Soit M un maj. de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$a_n \leq M.$$

Par passage à la limite $n \to \infty$ dans les inég., on

obtient $\quad \ell \leq M$. Donc ℓ est bien le plus

petit majorant de A.

Remarque : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors

. $a = \sup A \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} a$ majore A.

et $a = \inf A \Longleftrightarrow a$ minore A.

Preuve de (1) :

$\Rightarrow$). On suppose $a = \sup A$. Par déf., a est un maj. de A.

$\Leftarrow$). On suppose que a maj. A. Soit M un majorant de A. Comme M majore A et $a \in A$, $M \geq a$. Donc a est le plus petit maj. de A. D'où $a = \sup A$.

On note que, toujours pour $a \in A$,

a majore $A \Longleftrightarrow a$ est le plus gd. élé. de A (on dit aussi le maximum de A).

Détermination pratique de bornes sup. et inf. d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$.

On doit deviner la borne sup. b (resp. inf).

2 cas :

→ $b \in A$. D'après ce qui précède, on vérifie que b maj. A.

→ $b \notin A$. On vérifie que b maj. A et que b est limite d'une suite d'élé. de A.

Appl. : déterminer $\sup [0;1]$, $\sup [0;1[$, $\sup \mathbb{N}$.