50

Ex. 1. (TD3).

(i). (on devine : $\sup A = 1 = \max A$
$\inf A = -1$ et pas de min.)

Comme $1 \in A$ et, pour tout $x \in A$, $x \leq 1$, 1 est le maximum de A. Par le cours, $\sup A = \max A = 1$.

Pour tout $x \in A$, on a $x \geq -1$ donc -1 minore A.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 + \frac{1}{n} \in A$ et $\lim_{n \to \infty} -1 + \frac{1}{n} = -1$

donc, par le cours, $\inf A = -1$.

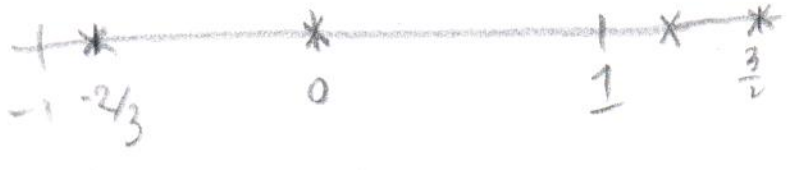
Si A avait un minimum, ce serait sa borne inférieure (cf. cours) donc -1. Or $-1 \notin A$ donc A n'a pas de minimum.

(ii) (on devine : $\sup B = +\infty$, $\inf B = \min B = 2$)

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $|M| + 100 \in B$ et $|M| + 100 > M$, M ne majore pas B. B est donc non majorée et $\sup B = +\infty$. Pour tout $x \in B$, $x \geq 2$ et $2 \in B$ donc $2 = \min B = \inf B$ (cf. cours).

(iii) Pour tout $x \in C$, $x \leq 2$ et $2 \in C$ donc $2 = \max C = \sup C$ (cf. cours). Pour tout $x \in C$, $x \geq -1$ et $-1 \in C$ donc $-1 = \min C = \inf C$ (cf. cours).

(iv) (



)

(On devine que $-1 = \inf F$ et
$\frac{3}{2} = \max F = \sup F$)

Comme $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \in F$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \leq 0$ si n est impair et

$(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$ si n est pair

donc $\frac{3}{2}$ majore F. D'où $\frac{3}{2} = \max F = \sup F$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(-1)^n + \frac{1}{n} > (-1)^n \geq -1 \qquad (*)$$

donc -1 minore F. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow F$
$p \longmapsto (-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$

Elle est bien définie. De plus, comme $\lim_{p \to \infty} \frac{1}{2p+1} = 0$,

$\lim u = -1$. Par le cours, $-1 = \inf F$.

Si F admettait un minimum, ce serait $\inf F = -1$ par le cours. Or $-1 \notin F$ par $(*)$ donc F n'a pas de minimum.

Ex. 2 :

1- (On devine que la limite est 0).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \frac{1 + \cos(n)}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc, par le th. des gendarmes, $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \cos(n)}{n} = 0$.

52

2- $\dfrac{1+\cos(1)}{1} \geq ?$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(1) > 0$.

$\dfrac{1+\cos(1)}{1} > 1$

Comme $\dfrac{1+\cos n}{n} \to 0$, on a $\left|\dfrac{1+\cos n}{n}\right| < 1$ à partir d'un certain rang N. Donc $\max A = \max\left\{\frac{1+\cos(n)}{n},\ n \leq N\right\}$

Si $n \geq 2$,
$\dfrac{1+\cos(n)}{n} \leq \dfrac{2}{n} \leq 1 < \dfrac{1+\cos(1)}{1}$

Soit $a = \dfrac{1+\cos(1)}{1} \in A$. Comme $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(1) > 0$ et $a > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\frac{1+\cos(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \leq 1 < a.$$

Donc $a = \max A$.

3- a). 0 est limite d'une suite d'élé. de A.
0 minore A ? Oui

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(n) \geq -1$ donc $\dfrac{1+\cos(n)}{n} \geq 0$.
0 minore donc A. Comme $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\cos(n)}{n}$ par 1, $0 = \inf A$ par le cours.

b). Si A avait un minimum, ce serait $\inf A = 0$. Donc $0 \in A$. Il existerait donc $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\cos(n) = -1$ c'est-à-dire $n = \pi + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Comme $n \neq 0$, $2k+1 \neq 0$ et $\pi = \frac{n}{2k+1} \in \mathbb{Q}$.
Contr. car $\pi \notin \mathbb{Q}$. A n'a pas de minimum.

✓