CUPGE. Analyse 2. Compléments. 2020-2021.

Complément de cours :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$, est une suite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall (m;n) \in D^2\,,\ \Big((m \geq N \text{ et } n \geq N) \implies |u_m - u_n| < \epsilon \Big)\,.$$

Lorsque $D = [n_0; \infty[$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, la proposition précédente est équivalente à

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall (n;p) \in D \times \mathbb{N}\,,\ \big(n \geq N \implies |u_{n+p} - u_n| < \epsilon \big)\,.$$

On **admet** que $\mathbb{K}$ est complet, c'est-à-dire que toutes les suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergent dans $\mathbb{K}$.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$. On **admet** que les suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad u_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big)\,,\quad v_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big)\,,$$

convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,ds\,.$$

Ces suites sont appelées des sommes de Riemann de f.

Exercice 1. : Achille et la tortue.

Achille et la tortue font la course en ligne droite. Comme Achille est deux fois plus rapide que la tortue, qui se déplace à la vitesse constante $v > 0$, la tortue part avec une longueur $l > 0$ d'avance. En particulier, lorsque la tortue parcourt une longueur L pendant une durée T, on a $v = L/T$.
On observe la course de la façon suivante : au temps $t_0 = 0$, Achille est en $x_0 = 0$ et la tortue en $y_0 = l$. Pendant une durée d_1, Achille parcourt la moitié de la distance qui le sépare de la tortue, soit $l/2$. Au bout du temps $t_1 = d_1$, Achille est donc en $x_1 = x_0 + l/2 = l/2$ et la tortue a avancé jusqu'en y_1. Par récurrence, supposons qu'au temps t_n, Achille soit en x_n, la tortue en y_n, avec $y_n > x_n$. Pendant une durée d_{n+1}, Achille parcourt la moitié de la distance qui le sépare de la tortue, soit $(y_n - x_n)/2$ et arrive en x_{n+1} à l'instant $t_{n+1} = t_n + d_{n+1}$ tandis que la tortue s'est déplacée en $y_{n+1} > y_n$.

1. Montrer les relations de récurrence suivantes : Pour tout n, $x_{n+1} = (y_n + x_n)/2$ et $y_{n+1} = (5y_n - x_n)/4$, et, pour tout $n \geq 1$, $d_{n+1} = 3d_n/4$.

2. Montrer que, pour tout n, $y_n - x_n > 0$. Achille ne dépasse donc jamais la tortue !
3. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on note par $x(t)$ (respectivement $y(t)$) la position d'Achille (respectivement de la tortue) à l'instant t. Vérifier que, pour $t \geq 0$, $x(t) = 2vt$ et $y(t) = l + vt$. Montrer qu'il existe $s > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \text{pour } t < s\,,\quad & x(t) < y(t)\,,\\ \text{pour } t > s\,,\quad & x(t) > y(t)\,,\\ & x(s) = y(s)\,. \end{aligned}$$

   Achille dépasse donc la tortue à l'instant s !
4. Expliquer le paradoxe (on pourra étudier la suite $(t_n)_n$).

Exercice 2. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{((n-q)!) \cdot (q!)} = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{((n-q)!) \cdot (q!)} = 0\,.$$

Exercice 3. : Constante d'Euler.
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\,.$$

On se propose de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge un certain réel $\gamma > 0$, appelé *constante d'Euler*. Pour ce faire, on introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(1+n)\,.$$

1. Soit $f :]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Montrer que f est dérivable.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à f entre $n-1$ et n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite γ vérifie $\gamma \in [1 - \ln 2; 1]$.

Exercice 4. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et par $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$ et $v_{n+1} = (u_{n+1} \cdot v_n)^{1/2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On appelle ℓ leur limite commune.

2. Soit $\alpha = \mathrm{Arccos}(a/b)$.

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_n \;=\; \frac{b\cdot\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)} \quad \text{et} \quad u_n \;=\; v_n\cdot\cos(\alpha/2^n)\,.$$

   (b) En déduire que $\ell = (b\cdot\sin\alpha)/\alpha$.

Exercice 5. : Construction de la fonction exponentielle réelle (cf. L2).
On va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite

$$\big(f_n(x)\big)_n \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} x^k/k!\right)_n$$

est convergente vers une limite que l'on note $f(x)$. On étudiera la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie, qui n'est autre que la fonction exponentielle.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(|a|^k/k!)_k$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$. En utilisant la sous-suite $(|a|^{k+1}/(k+1)!)_k$, en déduire que $l = 0$.

2. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ et en notant par C un majorant de la suite $(|2x|^k/k!)_k$, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$\big|f_{n+p}(x) - f_n(x)\big| \;\le\; C\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{l=0}^{p-1} 1/2^l \;=\; C\,2^{-n-1}\,\frac{1-1/2^p}{1-1/2} \;\le\; C\,2^{-n}\,.$$

   En déduire que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge vers une limite notée $f(x)$.

3. Déterminer $f(0)$. Montrer que, si $x \ge 0$, $f(x) \ge 1 + x$.

4. Soit $x \ge 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

   $$\big|f_n(x)\cdot f_n(-x) \;-\; 1\big| \;\le\; f_{2n}(2x) \;-\; f_n(2x)\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 2.)
   En déduire que $f(x)f(-x) = 1$.

5. Montrer que f est strictement positive en tout point.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1;1]$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \ge 2$. Montrer que

   $$f_n(x+y) - f_n(x) - yf_{n-1}(x) \;=\; \sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{k-2} \frac{x^l}{l!}\cdot\frac{y^{k-l}}{(k-l)!}\,. \tag{1}$$

   En déduire que

   $$\big|f_n(x+y) - f_n(x) - yf_{n-1}(x)\big| \;\le\; y^2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{k-2} \frac{|x|^l}{l!}\cdot\frac{1}{(k-l)!}$$

   et que ce dernier terme est $y^2\big(f_n(|x|+1) - f_n(|x|) - f_{n-1}(|x|)\big)$, en utilisant (1) pour $(x;y)$ remplacé par $(|x|;1)$.

7. Déduire des deux questions précédentes que

   $$\big|f(x+y) - f(x) - yf(x)\big| \;\le\; y^2\big(f(|x|+1) - 2f(|x|)\big)\,.$$

8. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dérivée ?

9. En déduire le tableau de variation de f. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$, si elles existent.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $C_m > 0$ tel que, pour tout $x \ge 0$, $f(x) \ge Cx^m$.

11. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, l'existence des limites suivantes et le fait que

    $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^p} \;=\; +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\cdot x^p \;=\; 0\,.$$

12. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x+y)/f(x)$ est bien définie, dérivable et que sa dérivée est nulle.

13. En déduire que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Exercice 6. : Fonctions réciproques.
On **admet** les choses suivantes :
La fonction exponentielle (réelle) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, est sa propre dérivée, vérifie $\exp(0) = 1$,

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \exp(x+y) \;=\; \exp(x)\cdot\exp(y)\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) \;=\; +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) \;=\; 0\,.$$

Les fonctions sinus et cosinus $\cos, \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. sin est impaire et cos est paire. sin est strictement positive sur $]0;\pi[$. De plus, $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$.

1. Montrer que exp est strictement croissante. En déduire qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa bijection réciproque est le logarithme népérien notée ln.

2. Montrer que ln est dérivable et que, pour tout $y > 0$, $\ln'(y) = 1/y$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \ln(|x|)$. Montrer que f est dérivable et que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 1/x$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $p_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$. Montrer que p_α est dérivable et que $p'_\alpha = \alpha p_{\alpha-1}$.

5. Montrer que cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$. En déduire qu'elle est bijective de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. Sa bijection réciproque est la fonction Arccosinus notée Arccos.

6. Montrer que Arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et que, pour tout $y \in]-1;1[$,
$$\mathrm{Arccos}'(y) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

7. Montrer que sin est strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$. En déduire qu'elle est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $[-1;1]$. Sa bijection réciproque est la fonction Arcsinus notée Arcsin.

8. Montrer que Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et que, pour tout $y \in]-1;1[$,
$$\mathrm{Arcsin}'(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

9. La fonction tangente est la fonction tan $:]-\pi/2;\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Montrer qu'elle est dérivable, impaire, strictement croissante et que $\lim_{x\to\pi/2}\tan(x) = +\infty$.

10. En déduire que tan est bijective de $]-\pi/2;\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction Arctangente notée Arctan.

11. Montrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Arctan}'(y) \;=\; \frac{1}{1+y^2}\,.$$

12. La fonction ch $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $\mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ (où $e^x = \exp(x)$), est la fonction cosinus hyperbolique. La fonction sh $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$, est la fonction sinus hyperbolique. Vérifier que ch est paire et que sh est impaire. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

13. Montrer que ch et sh sont dérivables et que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

14. Montrer que ch est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x) = +\infty$.

15. En déduire que ch est bijective de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction Argument cosinus hyperbolique notée Argch.

16. Montrer que Argch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que, pour tout $y > 1$,
$$\mathrm{Argch}'(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

17. Soit $y \geq 1$. En résolvant explicitement l'équation d'inconnue $x \geq 0$ donnée par $\mathrm{ch}(x) = y$, montrer que
$$\mathrm{Argch}(y) \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2-1}\Big)\,.$$

18. Montrer que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x) = +\infty$.

19. En déduire que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction Argument sinus hyperbolique notée Argsh.

20. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Argsh}'(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,.$$

21. Soit $y \in \mathbb{R}$. En résolvant explicitement l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{sh}(x) = y$, montrer que
$$\mathrm{Argsh}(y) \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big)\,.$$

Exercice 7. : Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = (x-a)^n$. On sait que f_n est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note par $f_n^{(p)}$ la dérivée $p$ième de f_n avec la convention $f_n^{(0)} = f_n$.

1. Déterminer toutes les dérivées de f_0. Déterminer toutes les dérivées de f_1. Déterminer toutes les dérivées de f_2.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

   $a)_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N} \cap [0;n]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(p)}(x) = \frac{n!}{(n-p)!}(x-a)^{n-p}$.

   $b)_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N} \cap [n+1;+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(p)}(x) = 0$.

   Vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

3. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Indication : on pourra utiliser la formule de Leibniz.)

Exercice 8. : On définit la fonction logarithme népérien ln :$]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ comme la primitive de la fonction continue $]0;+\infty[\ni t \mapsto 1/t$ qui s'annule en 1. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) \;=\; \int_1^x \frac{dt}{t}\,.$$

On remarque que cette définition est cohérente avec celle donnée dans l'exercice 6.

1. Montrer que ln est strictement croissante.
2. Soit $y > 0$ et g :$]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \ln(xy) - \ln(y)$. Montrer que g est de classe C^1 et déterminer sa dérivée.
3. En déduire que, pour tout $(x;y) \in]0;+\infty[^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
4. Soit $y > 0$.
   a). Montrer que $\ln(1/y) = -\ln(y)$.
   b). Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\ln(y^p) = p\ln(y)$.
   c). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\ln(y^n) = n\ln(y)$.
5. Soit $y > 1$ et $u = (y^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a). Montrer que la suite u est strictement croissante et positive. Sa limite ℓ existe donc dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
   b). Soit $v = (y^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que v est une sous-suite de u.
   c). En déduire que $\ell = +\infty$.
6. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
7. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. En déduire que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
8. Montrer que ln est bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On note par f sa bijection réciproque.
9. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.

Exercice 9. : On considère, pour $x \in]0;\pi/2[$,

$$I(x) \;=\; \int_x^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt \quad \text{et} \quad J(x) \;=\; \int_0^{\pi/2-x} \ln(\cos t)\,dt\,.$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in]0;\pi/2[$, $I(x)$ et $J(x)$ sont des intégrales de fonctions continues et que $I(x) < 0$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0;\pi/2[$, $I(x) = J(x)$. (Indication : on pourra utiliser un changement de variables.)
3. Montrer que $I := \lim_{x\to 0} I(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. (Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.)
4. Montrer que, pour tout $x \in]0;\pi/2[$,
$$\int_x^{\pi/2-x} \ln(\sin t)\,dt \;+\; \int_x^{\pi/2-x} \ln(\cos t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_{2x}^{\pi-2x} \ln\Big(\frac{\sin u}{2}\Big)\,du\,. \qquad (2)$$
5. Montrer que, pour tout $x \in]0;\pi/2[$,
$$\int_{2x}^{\pi-2x} \ln\Big(\frac{\sin u}{2}\Big)\,du \;=\; 2I(2x) \;-\; (\pi - 4x)\ln 2\,. \qquad (3)$$
6. En déduire que $I = -\pi\ln(\sqrt{2})$.

Remarque : il se trouve que l'on ne connait pas explicitement de primitive de $t \mapsto \ln(\sin t)$ ni de $t \mapsto \ln(\cos t)$.

Exercice 10. : Soit $a \in [0;1]$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \int_0^{ax} f(t)\,dt\,.$$

1. Soit $y \in [0;+\infty[$. Montrer que la suite $(y^p(p!)^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle converge vers 0.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f, en fonction de f.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
4. Montrer que f est la fonction nulle. (Indication : on pourra utiliser les formules de Taylor en 0.)

Exercice 11. : Intégrales de Poisson.

1. Montrer que, pour tout $(x;\theta) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \,-\, 2x\cos\theta \,+ 1 = |x - e^{i\theta}|^2 = |x - e^{-i\theta}|^2$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x^{2n} - 1 \;=\; (x^2 - 1)\cdot \prod_{k=1}^{n-1}\Big(x^2 \,-\, 2x\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + 1\Big)\,.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$, on pose

$$I(x) \ = \ \int_0^\pi \ln\big(x^2 \ - \ 2x\cos\theta \ + 1\big)\, d\theta \,.$$

Montrer que $I(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue de θ.

4. Montrer que $I(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $I(x) = 2\pi \ln |x|$, si $|x| > 1$.
(Indication : on pourra utiliser des sommes de Riemann.)

Exercice 12. : Intégrales de Poisson (bis).
Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$, on considère l'intégrale $I(x)$ définie dans l'exercice 11.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, exprimer $I(1/x)$ en fonction de $I(x)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, exprimer $I(-x)$ en fonction de $I(x)$.
3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, exprimer $I(x^2)$ en fonction de $I(x)$.
4. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour $x \in]0; 1/4[$, $|I(x) - I(0)| \leq cx$.
(Indication : on pourra utiliser le fait que, pour tout $u \in]-1; +\infty[$, il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que $\ln(1+u) = u(1+\theta u)^{-1}$.)
5. Montrer que I est continue en 0.
6. Retrouver, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, l'expression simple de $I(x)$ obtenue dans l'exercice 11.

Exercice 13. : Intégrales de Wallis. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n \ = \ \int_0^{\pi/2} \big(\cos t\big)^n\, dt \quad \text{et} \quad J_n \ = \ \int_0^{\pi/2} \big(\sin t\big)^n\, dt \,.$$

On pourra utiliser le résultat suivant : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On a l'équivalence suivante :

$$\big(\lim u_n \ = \ \ell\big) \iff \big(\lim u_{2n} \ = \ \ell \quad \text{et} \quad \lim u_{2n+1} \ = \ \ell\big)\,.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Montrer que $\lim \frac{I_{n+2}}{I_n} = 1$. En déduire que $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. (Indication : utiliser le 2.)

5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} \ = \ \frac{\pi \cdot (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} \ = \ \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

6. Montrer que $\lim I_{2n+1} I_{2n} = 0$. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. (Indication : montrer d'abord que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.)
7. Montrer que $\lim n I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$. En déduire que $(I_n\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (Indication : utiliser le 4.)

Exercice 14. : Soit $f : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$C_p(f) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ipt}\, dt \,.$$

Montrer que les suites réelles $(C_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_{-n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 15. : Montrer que, quand $n \to \infty$,

$$\int_0^1 (2+t)^{-n}\, dt \ \longrightarrow \ 0\,, \quad \int_0^1 (2+t^2)^{-n}\, dt \ \longrightarrow \ 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \big(\cos t\big)^n\, dt \ \longrightarrow \ 0\,.$$

Exercice 16. : Lemme de Gronwall.
Soit $a, f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues telles que

$$\forall t \geq 0\,, \quad f(t) \ \leq \ f(0) \ + \ \int_0^t a(s) f(s)\, ds\,. \tag{4}$$

On va montrer l'inégalité

$$\forall t \geq 0\,, \quad f(t) \ \leq \ f(0)\, e^{\int_0^t a(s)\, ds}\,. \tag{5}$$

1. Soit $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) \ = \ e^{-\int_0^t a(s)\, ds} \cdot \int_0^t a(s) f(s)\, ds\,.$$

Vérifier que g est dérivable et que

$$\forall t \geq 0\,, \quad g'(t) \ \leq \ f(0) \cdot \frac{d}{dx}\Big(-e^{-\int_0^x a(s)\, ds}\Big)(t)\,. \tag{6}$$

2. En déduire que

$$\forall t \geq 0\,, \quad g(t) \ \leq \ f(0) \cdot \Big(1 \ - \ e^{-\int_0^t a(s)\, ds}\Big)\,. \tag{7}$$

3. Déduire (5) de (4) et (7).
4. Soit $h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable vérifiant

$$\forall t \geq 0\,, \quad h'(t) \;\leq\; a(t)h(t)\,. \tag{8}$$

Vérifier que (4) avec f remplacée par h est valide. En déduire que (5) avec f remplacée par h est vraie.

Exercice 17. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$h_n(t) \;=\; \big(n+1+t\big)^{n+1}\,.$$

1. Montrer que h_n est dérivable.
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $h_n'(t) \leq h_n(t)$.
3. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $h_n(t) \leq (n+1)^{n+1}e^t$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 16.)
4. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $t^{n+1} \leq (n+1)^{n+1}e^t$.
5. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t}$ existe et vaut 0.

Exercice 18. : On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{array}{ll} e^{-1/x} & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{array} \end{array}$$

On admet le résultat suivant : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n := \lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (avec $f^{(0)} = f$ et, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f). Alors f admet un prolongement par continuité F en a, F est une fonction de classe C^∞ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(a) = l_n$.

1. Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n, dont on précisera le degré, telle que

$$\forall x > 0\,, \quad g^{(n)}(x) \;=\; P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot g(x)\,.$$

3. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que g et g' sont positives, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$.
5. Montrer les équivalences

$$\Big(\big(g(x) \;>\; 0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(x \;>\; 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) \;>\; 0\big) \Longleftrightarrow \quad \big(x \;>\; 0\big)\Big)\,.$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie principale du développement de Taylor de g en 0 à l'ordre n est identique à celle de la fonction nulle.

Exercice 19. : On considère la fonction g de l'exercice 18 et on pourra utiliser sans démonstration les résultats de l'exercice 18. On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) \;=\; g\big(x^2-1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) \;=\; g\big(4-x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.
   (c) Établir les deux équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rcl} \big(h_1(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \in [-1;1]\big)\,, \\ \big(h_2(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \notin]-2;2[\big)\,. \end{array}$$

   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; \frac{h_2(x)}{h_2(x)+h_1(x)}\,.$$

   (a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (c) Montrer l'équivalence

$$\big(f(x) \;=\; 0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(x \notin]-2;2[\big)\,.$$

   (d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?
   (e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$. *Indication* : on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g'.
3. Étant donnés $a > b > 0$, donner (sans justification) une fonction f_1, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_1(x) \leq 1$.
4. On considère $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $\rho(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $F(x;y) = f(\rho(x;y))$. Montrer que les dérivées partielles premières de F sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer-les en fonction de f. Même chose avec les dérivées partielles secondes.

5. Montrer les équivalences

$$\big(F(x;y) \;=\; 0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(\rho(x;y) \;\geq\; 2\big)\,,$$
$$\big(F(x;y) \;=\; 1\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(\rho(x;y) \;\leq\; 1\big)\,.$$

Montrer que $0 \leq F \leq 1$.

Exercice 20. : On considère la fonction f de l'exercice 19.

1. Construire une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $fh = f$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)h(x) = f(x)$, et telle que $h(x) = 0$, si $|x| \geq 3$.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = h(x)f^{(n)}(x)$.

Exercice 21. : On considère la fonction f de l'exercice 19.

1. Construire une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 0$ si $x \leq -2$ et $\varphi(x) = 1$ si $x \geq 2$. (Indication : on pourra utiliser une primitive appropriée de f.)
2. Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynôme. Construire une fonction $\varphi_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi_P(x) = 0$ si $x \leq -2$ et $\varphi_P(x) = P(x)$ si $x \geq 2$.
3. Montrer qu'une fonction polynôme ne peut pas appartenir à l'ensemble des fonctions φ_P qui vérifient les conditions du 2.
4. Montrer que toute primitive de f qui s'annule dans $]-\infty;-2]$ est nulle sur $]-\infty;-2]$.
5. Montrer qu'aucune primitive de f n'est nulle en dehors de l'intervalle $]-2;2[$.
6. Vérifier que l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$\tilde{f}(x) \;=\; f(x) \cdot \Big(\int_{-2}^{2} f(u)\,du\Big)^{-1}$$
est bien définie, de classe C^∞, nulle en dehors de l'intervalle $]-2;2[$ et que son intégrale de -2 à 2 vaut 1.
7. On considère la fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \lambda^{-1}h_2(x)$, où h_2 est définie dans l'exercice 19 et où
$$\lambda \;:=\; \int_{-2}^{2} h_2(u)\,du \;>\; 0\,.$$
Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$h(x) \;=\; \int_{-2}^{x} \Big(f(t) \;-\; \psi(t) \cdot \int_{-2}^{2} f(u)\,du\Big)\,dt$$
est non nulle, de classe C^∞, et que $h(x) = 0 = h'(x)$ si $|x| \geq 2$. (Indication : on pourra montrer que $h''(1) > 0$ pour montrer que h n'est pas nulle.)

Exercice 22. : On considère la fonction f de l'exercice 19. On note par b son intégrale sur l'intervalle $[-2;2]$. On remarque que $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = nb^{-1}f(nx)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est nulle en dehors de l'intervalle $]-2n^{-1};2n^{-1}[$, f_n vaut 1 sur l'intervalle $[-n^{-1};n^{-1}]$, f_n est positive et que
$$\int_{-2}^{2} f_n(u)\,du \;=\; 1\,.$$
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par
$$a_n \;=\; \int_{-2}^{2} g(x) \cdot f_n(x)\,dx\,.$$
On va montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $g(0)$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\big|a_n \;-\; g(0)\big| \;\leq\; \int_{-2n^{-1}}^{2n^{-1}} \big|g(x) \;-\; g(0)\big| \cdot f_n(x)\,dx\,.$$
   b. En déduire, en utilisant la définition, que $\lim a_n$ existe et vaut $g(0)$.