**Exercice 23. :** Construction de la fonction exponentielle complexe.
On va montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite

$$\big(F_n(z)\big)_n \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} z^k/k!\right)_n$$

est convergente vers une limite que l'on note $F(z)$. On étudiera la fonction $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie. C'est la fonction exponentielle complexe, notée exp. On remarque que la restriction de $F$ à $\mathbb{R}$ est la fonction exponentielle réelle de l'exercice 5.
Notation : Pour $z \in \mathbb{C}$ on note par $\Re(z)$ sa partie réelle et par $\Im(z)$ sa partie imaginaire.
Soit $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite $(|a|^k/k!)_k$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$. En utilisant la sous-suite $(|a|^{k+1}/(k+1)!)_k$, en déduire que $l = 0$.

2. Étant donné $z \in \mathbb{C}$ et en notant par $C$ un majorant de la suite $(|2z|^k/k!)_k$, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\big|F_{n+p}(z) - F_n(z)\big| \;\le\; C\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{l=0}^{p-1} 1/2^l \;=\; C\,2^{-n-1}\,\frac{1-1/2^p}{1-1/2} \;\le\; C\,2^{-n}\,.$$

   En déduire que $(F_n(z))_n$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, cette suite converge vers une limite notée $F(z)$.

3. Déterminer $F(0)$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$.

4. Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F_n(z_1)\cdot F_n(z_2) \;=\; \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\frac{z_1^k z_2^{p-k}}{k!\cdot(p-k)!} \;+\; \sum_{p=n+1}^{2n}\;\sum_{\substack{(k;\ell)\in([0;n]\cap\mathbb{N})^2\\ k+\ell=p}}\frac{z_1^k z_2^\ell}{k!\cdot\ell!}\,.$$

   En déduire que

$$\big|F_n(z_1)\cdot F_n(z_2) \;-\; F_n(z_1+z_2)\big| \;\le\; \sum_{p=n+1}^{2n}\frac{\big(|z_1|+|z_2|\big)^p}{p!}\,.$$

5. Montrer que, pour tout $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$, $F(z_1+z_2) = F(z_1)F(z_2)$.

6. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) \neq 0$ et $(F(z))^{-1} = F(-z)$.

7. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $F(y) \in \mathbb{R}$ et $F(iy) \in \mathbb{S}$.

8. En déduire que, pour $z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| = F(\Re(z))$.



**Exercice 24. :** Étude de sinus et cosinus.
On utilise les notations et les résultats de l'exercice 23.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \exp(ix)$, $\cos(x) = \Re(\exp(ix))$ et $\sin(x) = \Im(\exp(ix))$. On va étudier les fonctions $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On rappelle que $\varphi(0) = F(0) = 1$, que, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ et $(\varphi(x))^{-1} = \varphi(-x)$, que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. En particulier, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad\text{et}\quad h_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $g_n(x) = \Re(F_{2n}(ix))$ et $h_n(x) = \Im(F_{2n+1}(ix))$. En déduire que

$$\cos(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad\text{et}\quad \sin(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\big|g_n(x+y) \;-\; g_n(x) \;+\; y h_{n-1}(x)\big| \;\le\; y^2 F_{2n}\big(|x|+1\big)\,.$$

   En déduire que cosinus est dérivable en $x$ et que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\big|h_n(x+y) \;-\; h_n(x) \;-\; y g_{n-1}(x)\big| \;\le\; y^2 F_{2n+1}\big(|x|+1\big)\,.$$

   En déduire que sinus est dérivable en $x$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$.

4. Montrer que $\varphi$ n'est pas constante.

5. Montrer que cosinus est paire et sinus est impaire.

6. On pose $K = \varphi^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}; \varphi(x) = 1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\sin(x) = 0$ alors $2x \in K$. Montrer que si $\cos(x) = 0$ alors $4x \in K$.

7. On suppose que $\varphi$ est injective.

   a). Montrer que $K = \{0\}$.
   b). Montrer que cosinus ne s'annule pas.
   c). En déduire que cosinus ne prend que des valeurs strictement positives.
   d). Soit $x_0 > 0$. Vérifier que $\sin(x_0) > 0$ et que, pour $x \ge x_0$, $\cos(x) - \cos(x_0) \ge (x - x_0)\sin(x_0)$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$ existe et vaut $+\infty$.
   e). Établir une contradiction.

8. Montrer que $K \neq \{0\}$ et $K \cap \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$. On pose $a = \inf K \cap \mathbb{R}^{+*}$. On a $a \ge 0$.

9. On suppose que $a = 0$.

   a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K \cap ]y-\epsilon; y+\epsilon[ \neq \emptyset$. (Indication : on pourra montrer l'existence d'un $b \in ]0;\epsilon[ \cap K$ et effectuer la division euclidienne de $y$ par $b$.)
   b). Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $K$ qui converge vers $y$.
   c). En déduire que $\varphi(y) = 1$.
   d). Établir une contradiction.

10. Par la question précédente, on sait que $a > 0$. On pose $a\mathbb{Z} = \{pa; p \in \mathbb{Z}\}$.

   a). Montrer que $\varphi(a) = 1$.
   b). En déduire que $a\mathbb{Z} \subset K$.
   c). Soit $y \in K$. Par division euclidienne de $y$ par $a$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0; a[$ tels que $y = pa + r$. Montrer que $\varphi(r) = 1$. En déduire que $K \subset a\mathbb{Z}$.
   d). Montrer que $\varphi$ est périodique de période $a$.
   En particulier, cosinus et sinus sont aussi périodiques de période $a$.

11. Par la question précédente, on sait que $K = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. On verra plus loin que $a = 2\pi$, où $\pi$ est le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre.

   a). Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ données par $z^2 = 1$ et $z^2 = -1$.
   b). En déduire que $\varphi(a/2) = -1$ et $\varphi(a/4) \in \{-i; i\}$. Montrer que $\varphi(-a/2) = -1$.
   c). Montrer que sinus ne s'annule pas sur $]0; a/2[$. (Indication : utiliser 6.)
   d). En déduire que sinus est strictement positive sur $]0; a/2[$. (Indication : utiliser 3 et 4.) Montrer que $\varphi(a/4) = i$.
   e). Donner les variations de cosinus et sinus sur l'intervalle $[0; a/4]$. Vérifier que l'image $\cos([0; a/4])$ de l'intervalle $[0; a/4]$ par la fonction cosinus est l'intervalle $[0; 1]$ et que l'image $\sin([0; a/4])$ de l'intervalle $[0; a/4]$ par la fonction sinus est aussi l'intervalle $[0; 1]$.

12. On montre dans cette question que $\varphi$ est surjective.

   a). Soit $z \in \mathbb{S}$. Montrer qu'il existe $u \in \{z; -z; \overline{z}; -\overline{z}\}$ tel que $\Re(u) \geq 0$ et $\Im(u) \geq 0$.
   b). Montrer que $u \in \varphi([0; a/4])$.
   c). En déduire que $\mathbb{S} = \varphi(]-a/2; a/2])$. Vérifier que la restriction de $\varphi$ à l'intervalle $]-a/2; a/2]$ est injective.

13. Surjectivité de l'exponentielle complexe. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\varphi(\theta)$. En déduire qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(z')$.

14. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + (a/2)) = -\cos(x)$, $\sin(x + (a/2)) = -\sin(x)$, $\cos((a/4) - x) = \sin(x)$ et $\sin((a/4) - x) = \cos(x)$.



15. Détermination de $a$.
   Soit $(t_0; t_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t_0 < t_1$. Soit $\gamma : [t_0; t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application donnée par $\gamma(t) = (x(t); y(t))$. On suppose que $\gamma$ est une courbe paramétrée de classe $C^1$, c'est-à-dire que les fonctions $x$ et $y$ sont de classe $C^1$. On suppose de plus que la restriction de $\gamma$ à $]t_0; t_1[$ est injective. On note par $\mathrm{Im}\gamma$ l'image de $\gamma$. On définit les longueurs de $\mathrm{Im}\gamma$, $\mathrm{Im}\gamma_{|]t_0;t_1]}$, $\mathrm{Im}\gamma_{|[t_0;t_1[}$ et $\mathrm{Im}\gamma_{|]t_0;t_1[}$, par

$$L(\gamma) \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,.$$

   a). Montrer que $\mathbb{S}$ est l'image d'une courbe paramétrée dont la longueur est bien définie. Calculer cette longueur en fonction de $a$.
   b). Montrer que le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre est $a/2$.
   **Par définition de $\pi$, on a donc $a = 2\pi$.**

On remarque que l'on a établi des propriétés de cosinus, de sinus et de l'exponentielle complexe, qui avaient été admises au semestre 1.