Complément : Théorèmes de récurrence. 1

On admet les résultats suivants.

Th. 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de n. On a

$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\right).$$

Récurrence à partir d'un certain rang :

Th. 2 : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[$, soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de n. On a

$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[,\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[, \\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \end{array}\right).$$

Récurrence forte à partir d'un certain rang :

Th. 3 : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[$, soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de n. On a :

$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[,\ \left((\forall k \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; n],\ \mathcal{P}(k) \text{ est vraie}) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}) \right) \end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\right).$$

Récurrence finie :

Th. 4 : Soit $(n_0 ; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$. Pour $n \in [n_0 ; n_1] \cap \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de n. On a

$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in [n_0 ; n_1[\cap \mathbb{N},\ \left(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \forall n \in [n_0 ; n_1] \cap \mathbb{N}, \\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \end{array} \right).$$

Récurrence descendante :

Th. 5 : Soit $(n_0 ; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$. Pour $n \in \mathbb{N} \cap [n_0 ; n_1]$, soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de n. On a

$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}(n_1) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in]n_0 ; n_1] \cap \mathbb{N},\ \left(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n-1)\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \forall n \in [n_0 ; n_1] \cap \mathbb{N}, \\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \end{array} \right).$$