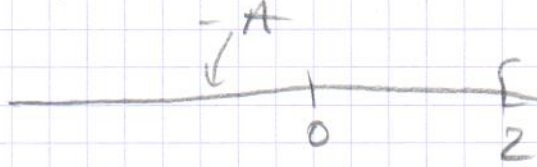


Ex. 4 -

9 - $\sup (-A) \cup [0; 2[$? où $-A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.



2 doit être la borne sup.

ex. 5.

$$[0; 2[\subset (-A) \cup [0; 2[\rightarrow \sup [0; 2[\leq \sup (-A) \cup [0; 2[$$

et on a vu que $\sup [0; 2[= 2$.

$$\sup (-A) \cup [0; 2[\leq 2 ?$$

il suffit de montrer que 2 maj. l'ens.

Comme $[0; 2[\subset (-A) \cup [0; 2[$, on a

$$\sup [0; 2[\leq \sup (-A) \cup [0; 2[$$

par l'ex. 5, on a vu que $\sup [0; 2[= 2$.

$$\text{Donc } 2 \leq \sup (-A) \cup [0; 2[.$$

2 maj. $[0; 2[$, 0 maj. $-A$ donc 2 maj. $-A \cup [0; 2[$.

$$\text{D'où } \sup (-A) \cup [0; 2[\leq 2.$$

$$\text{Concl.: } \sup (-A) \cup [0; 2[= 2.$$

$$10. B = \{n \in \mathbb{N}; -n^2 + 5n - 4 \geq 0\}.$$

2

$$\sup B = ?$$

"calculer B"

$$-n^2 + 5n - 4 \geq 0 \Leftrightarrow n \in [a; b]$$

a, b racines du poly. $\uparrow \quad \uparrow$
1 4

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$\frac{-5+3}{-2}, \frac{-5-3}{-2}$$

$$1 \quad 4$$

$$-n^2 + 5n - 4 = -(n-1)(n-4)$$

B ens. fini!!

max B existe!

(lors)

$\sup B = \max B$.

$$B = \mathbb{I}1; 4\mathbb{J}.$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \quad -(n-1)(n-4) = -(n^2 - 5n + 4) \\ = -n^2 + 5n - 4.$$

$$-(n-1)(n-4) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1 \text{ et } n \leq 4.$$

$$\text{Donc } B = \mathbb{I}1; 4\mathbb{J}. \text{ Donc } 4 = \max B.$$

$$\text{Par le cours, } \sup B = \max B = 4.$$

$$\mathbb{I}0; 7\mathbb{I} := \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \text{ et } x < 7\}$$

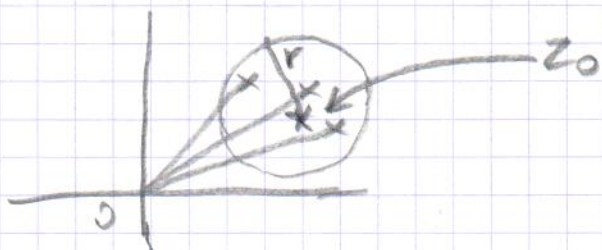
$$\mathbb{I}0; 7\mathbb{I} := \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n < 7\}$$

Ex. 12.

13

$$D(z_0; r] := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

$$A := \{|z|; z \in D(z_0; r]\} \subset \mathbb{R}^+.$$



sup A ?

$$\sup A \leq |z_0| + r ?$$

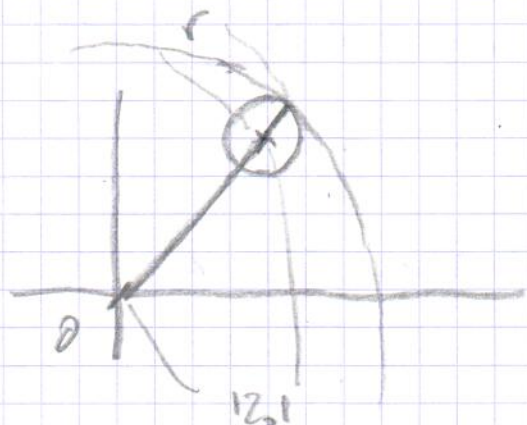
il suffit de montrer que $|z_0| + r$ majore A.

Soit $z \in D(0; r]$. On a, par l'inég. tria.,

$$|z| = |z - z_0 + z_0| \leq \underbrace{|z - z_0|}_{\leq r} + |z_0| \leq r + |z_0|$$

Car $z \in D(0; r]$, ceci étant vrai pour tout $z \in D(0; r]$, $r + |z_0|$ maj. A.

Par déf. de $\sup A$, $\sup A \leq r + |z_0|$.



Soit $z \in D(z_0; r)$. Comme $|z_0| + r = \sup A$,

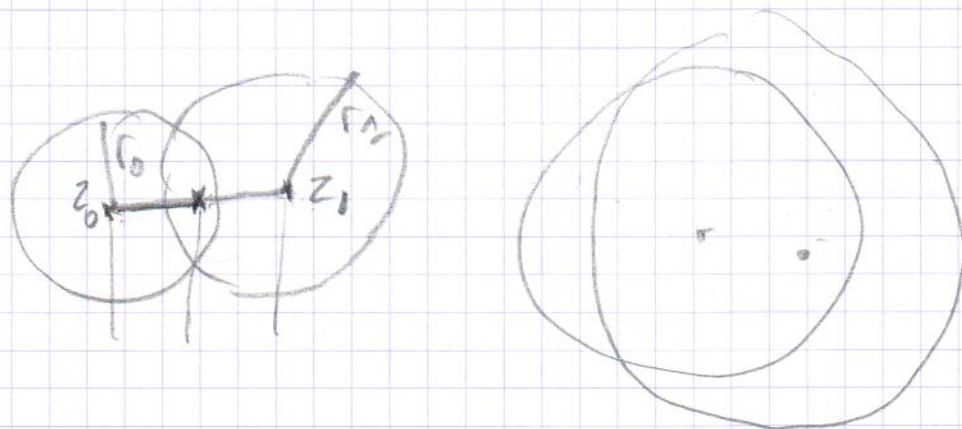
4

$|z| \leq |z_0| + r$. Dne $z \in D(0; |z_0| + r)$.

"
 $|z - 0|$

2 - on traite seulement a) et c).

a).



$\Rightarrow$) Soit $z \in D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1]$.

$$|z_0 - z_1| \leq |(z_0 - z) + (z - z_1)|$$

$$\leq |z_0 - z| + |z - z_1| < r_0 + r_1.$$

$\Leftarrow$). On suppose $|z_0 - z_1| < r_0 + r_1$.

Si $z_0 = z_1$ alors $z_0 \in D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1]$.

Voyons le cas où $r := |z_0 - z_1| > 0$.

L'hypothèse est $1 < \frac{r_0 + r_1}{r}$.

Il s'agit de chercher un pt. z sur la droite définie par z_0 et z_1 .

Soit $\delta \in]0; r_0[$ (à choisir plus tard) $\leq$
 et $z = z_0 + (r_0 - \delta) \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|} = z_0 + \frac{r_0 - \delta}{r} (z_1 - z_0)$.

On a $|z - z_0| = r_0 - \delta < r_0$ donc $z \in D(z_0; r_0[$,

on a $z - z_1 = (z_0 - z_1) (1 - \frac{r_0 - \delta}{r})$.

Donc

$$|z - z_1| < r_1 \Leftrightarrow r (1 - \frac{r_0 - \delta}{r}) < r_1 \Leftrightarrow r - r_0 + \delta < r_1$$

$$\Leftrightarrow r + \delta < r_0 + r_1,$$

Comme $r_0 + r_1 > r$, on peut trouver $\delta > 0$ tq.

$\delta < r_0$ et $r + \delta < r_0 + r_1$ (par ex. $\delta = \min(\frac{r_0}{2}, \frac{r_0 + r_1 - r}{2})$).

Pour ce δ , $z \in D(z_0; r_0[$ et, d'après les
 équiv., $z \in D(z_1; r_1[$. Donc $D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\neq \emptyset$.

c). Correction: $D(z_0; r_0[\subset D(z_1; r_1[\Leftrightarrow |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1$.

$\Leftarrow$) On supp. $|z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1$. Soit $z \in D(z_0; r_0[$

On a $|z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \leq |z - z_0| + |z_0 - z_1| < r_0 + |z_0 - z_1| \leq r_1$.

Donc $z \in D(z_1; r_1[$. On a montré: $D(z_0; r_0[\subset D(z_1; r_1[$.

$\Rightarrow$) On montre la contraposée c'est-à-dire:

$$|z_0 - z_1| + r_0 > r_1 \Rightarrow D(z_0; r_0[\not\subset D(z_1; r_1[.$$

On supp. $|z_0 - z_1| + r_0 > r_1$. Si $z_0 = z_1$, $z_0 + \frac{r_0 + r_1}{2} \in D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[$.

Donc $D(z_0; r_0[\not\subset D(z_1; r_1[$. On supp. $z_0 \neq z_1$.

Soit $\delta \in]0; \min(r_0, |z_0 - z_1| + r_0 - r_1)[$ et

$z = z_0 - (r_0 - \delta) \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}$. On a $|z - z_0| = r_0 - \delta < r_0$ donc $z \in D(z_0; r_0[$.

On a $z - z_1 = (z_0 - z_1) (1 + \frac{r_0 - \delta}{|z_1 - z_0|})$ donc

$$|z - z_1| = |z_0 - z_1| + r_0 - \delta > r_1 \text{ donc } z \notin D(z_1; r_1[.$$

On a montré $D(z_0; r_0[\not\subset D(z_1; r_1[$.

Ex. 13.



16

$$1. \quad r = |z_0 - z_1|.$$

$$a). \quad r < r_1.$$

{ idée uti. 2c) de l'ex. 12 }

Soit $\epsilon > 0$ tq. $|z_0 - z_1| + \epsilon < r_1$.

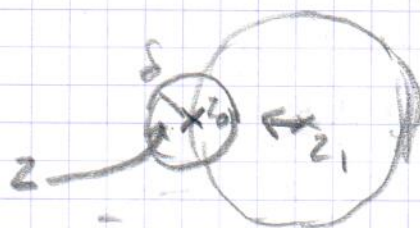
C'est possible car $r_1 > |z_0 - z_1| = r$.

$$(\epsilon := \frac{r_1 - r}{2}).$$

Par 2c) de l'ex. 12, $D(z_0, \epsilon) \subset D(z_1, r_1)$.

Donc $D(z_1, r_1)$ est un vois. de z_0 .

$$b). \quad r = r_1 = |z_0 - z_1|.$$



Supp. que $D(z_1, r_1)$ soit un vois. de z_0 .

Il existe $\delta > 0$ tq. $D(z_0, \delta) \subset D(z_1, r_1)$.

$$\text{Soit } z = z_0 + \frac{\delta}{2} \frac{z_0 - z_1}{|z_0 - z_1|}. \quad \text{On a}$$

$$|z - z_0| = \frac{\delta}{2} \text{ et donc } z \in D(z_0, \delta).$$

$$\text{On a } |z - z_1| = \left| z_0 - z_1 + \frac{\delta}{2} \frac{z_0 - z_1}{|z_0 - z_1|} \right| =$$

Dne

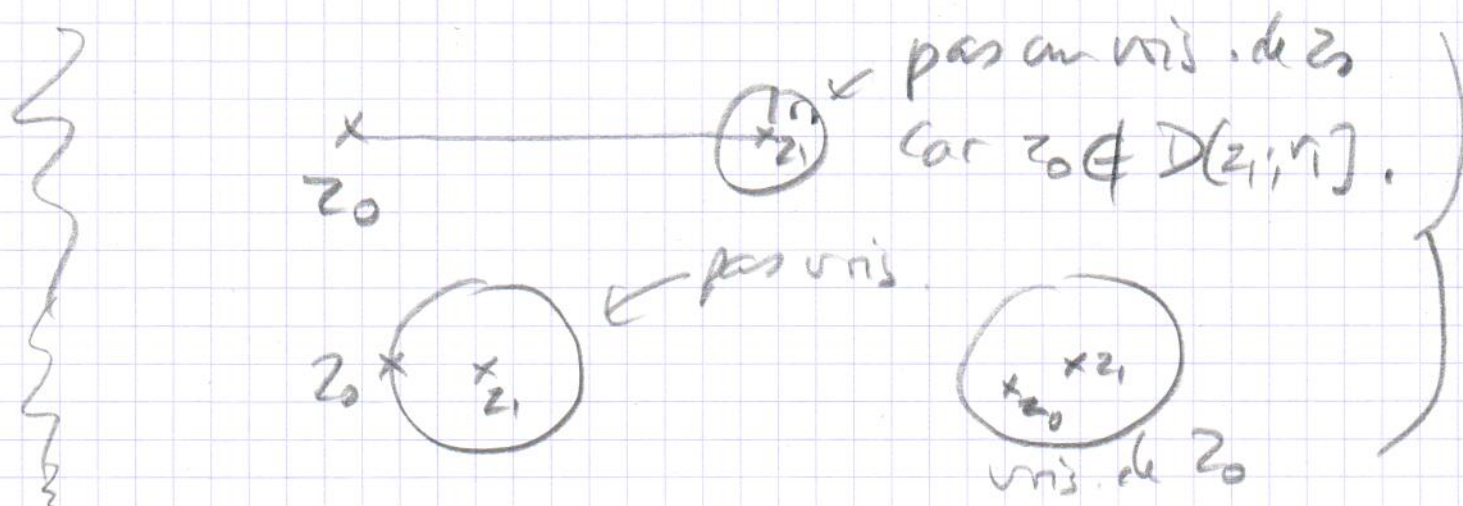
7

$$|z - z_1| = |(z_0 - z_1) \left(1 + \frac{\delta}{2|z_0 - z_1|}\right)|$$

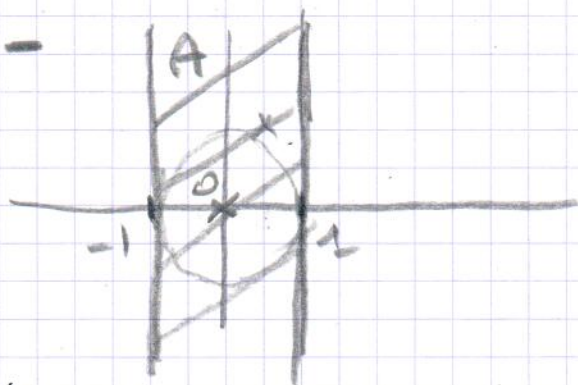
$$= |z_0 - z_1| \left(1 + \frac{\delta}{2|z_0 - z_1|}\right) > |z_0 - z_1| = r.$$

Dne $z \notin D(z_1; r)$.

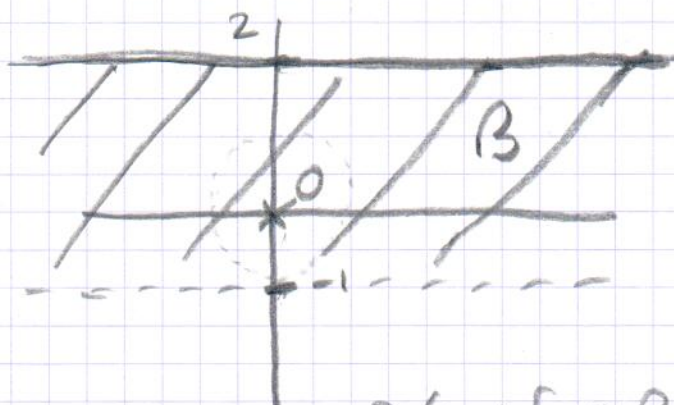
Contr. avec $D(z_0; \delta) \subset D(z_1; r)$.



2 -



$D(0; 1] \subset A$



$D(0; 1] \subset B$

Pour $z \in D(0; 1]$ on a $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| < 1$
dne $\operatorname{Re}(z) \in]-1; 1[\subset [-1; 1]$. Dne $z \in A$.

8

Donc $D(0,1] \subset A$ et A est
un vois. de 0 ,

Pour $z \in D(0,1]$, on a $|\rho_m(z)| \leq |z| < 1$
donc $\rho_m(z) \in]-1,1[\subset]-1,2]$.

Donc $z \in B$. D'où $D(0,1] \subset B$
et B est un vois. de 0 .