EISTI, Analyse Fonctionnelle et EDP.

Examen - Partie EDP.

Exercice 3. : Soit $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = it$. Soit $\mathbb{1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{1}(t) = 1$. Pour une fonction $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g\varphi \quad \text{et} \quad \tilde{T}_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g\varphi \, ,$$

lorsque ces applications sont bien définies. On rappelle que, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\hat{\varphi} \ : \ \mathbb{R} \ni \xi \ \mapsto \ \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx \, .$$

On **admet** le résultat suivant : Une distribution tempérée T (i.e. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$) est solution de l'équation $fT = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $T = k\delta_0$.

1. Vérifier que $\tilde{T}_H$ et $\tilde{T}_{\mathbb{1}}$ sont des distributions tempérées (i.e. $\tilde{T}_H, \tilde{T}_{\mathbb{1}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$).
2. Montrer que $(\tilde{T}_H)' = \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser T_H et le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).
3. En déduire que la transformée de Fourier $F(\tilde{T}_H)$ de $\tilde{T}_H$ est solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donnée par $fT = \tilde{T}_{\mathbb{1}}$.
4. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction paire (i.e., pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\psi(-\xi) = \psi(\xi)$). Montrer que $F(\tilde{T}_H)(\psi) = \pi\psi(0)$.
5. En déduire que
$$F(\tilde{T}_H) \ = \ -i \, \mathrm{vp}\frac{1}{\xi} \ + \ \pi\delta_0 \, .$$

Exercice 4. : Soit $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geq 3$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$, définie par $f(x) = |x|^{2-d}$,

$$|x| \ := \ \Big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \Big)^{1/2} \, .$$

Pour $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$(\Delta h)(x) \ = \ \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x) \, .$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (|x|^2 + 1/n)^\alpha$ avec $\alpha = (2-d)/2 = 1 - d/2$. Avec les notations de l'exercice 3, montrer que $(T_{f_n})_n$ converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\Delta f_n)(x) \;=\; \frac{2\alpha d}{n}\big(|x|^2 + 1/n\big)^{\alpha-2}\,.$$

3. Montrer $(T_{\Delta f_n})_n$ converge vers $c^{-1}\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, pour un réel $c \neq 0$. En déduire que T_{cf} est une solution fondamentale du laplacien Δ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$. On considère la distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_k}\,.$$

Vérifier que S est à support compact. En déduire une solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par $\Delta T = S$ de la forme $T = T_g$, pour une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ que l'on précisera.

Fin de l'épreuve.