EISTI, Analyse Fonctionnelle et EDP.

Examen - Partie EDP.

Exercice 3. : On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dont la restriction à l'intervalle $[p; p+1[$ est la fonction constante égale à p, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on note par $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique définie par $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathbb{1}_A(t) = 1$, si $t \in A$, et $\mathbb{1}_A(t) = 0$, si $t \notin A$. Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\varphi \ \in \ \mathbb{C}\,,$$

lorsque cette application est bien définie.

1. Vérifier que T_E est bien définie et que $T_E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la série de distributions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ (il s'agit donc de montrer que la suite $(\sum_{-n\leq k\leq n} \delta_k)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). On appelle S la somme de cette série (donc $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n = E \cdot \mathbb{1}_{[-n;n]}$. Vérifier que $T_{E_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\big(T_{E_n}\big)' \ = \ -n\delta_{-n} \ + \ (1-n)\delta_n \ + \sum_{k=-n+1}^{n-1} \delta_k \ = \ -(n+1)\delta_{-n} \ - \ n\delta_n \ + \sum_{k=-n}^{n} \delta_k\,.$$

4. Montrer que $(T_{E_n})_n$ converge vers T_E dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
5. En déduire que

$$\big(T_E\big)' \ = \ S \ =: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k\,.$$

Exercice 4. : Soit $d \in \mathbb{N}$ avec $d \geq 3$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$, définie par $f(x) = |x|^{2-d}$,

$$|x| \ := \ \Big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\Big)^{1/2}\,.$$

Pour $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$(\Delta h)(x) \ = \ \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x)\,.$$

Pour $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g\varphi \ \in \ \mathbb{C}\,,$$

lorsque cette application est bien définie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (|x|^2 + 1/n)^\alpha$ avec $\alpha = (2-d)/2 = 1 - d/2$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ et que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que T_f et T_{f_n} sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que la suite complexe $(T_{f_n}(\varphi))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $T_f(\varphi)$. En déduire que $(T_{f_n})_n$ converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\Delta f_n)(x) \ = \ \frac{2\alpha d}{n}(|x|^2 + 1/n)^{\alpha-2} \,.$$

   Pourquoi $T_{\Delta f_n} = \Delta(T_{f_n})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$?
5. Montrer $(T_{\Delta f_n})_n$ converge vers $c^{-1}\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, où c vérifie

$$c^{-1} \ = \ 2\alpha d \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \big(|y|^2 + 1\big)^{\alpha-2} \, dy \ \in \,]0; +\infty[\,.$$

   (Indication : on pourra effectuer un changement de variables dans l'expression de $T_{\Delta f_n}(\varphi)$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$).
6. En déduire que T_{cf} est une solution fondamentale du laplacien Δ.
7. Pour $j \in [1; d] \cap \mathbb{N}$ et $\sigma \in \{-1; 1\}$, on considère

$$F_j^\sigma \ = \ \big\{x = (x_1; \cdots; x_d) \in \mathbb{R}^d ; x_j = \sigma \,, \, -1 \leq x_k \leq 1 \,, \text{pour } k \neq j\big\} \,.$$

   Les F_j^σ constituent les faces de l'hypercube C de $\mathbb{R}^d$ centré en 0, de côté 2, dont les axes sont les droites coordonnées. La masse de Dirac sur cet hypercube est

$$S : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \sum_{j=1}^{d} \sum_{\sigma=-1}^{1} \int_{F_j^\sigma} \varphi(x) d\tilde{x}_j \,,$$

   où $d\tilde{x}_j = dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d$. Vérifier que $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et est à support compact. En déduire une solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par $\Delta T = S$ de la forme $T = T_g$, pour une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ que l'on précisera.

Fin de l'épreuve.