EISTI, ING2, Théorie des distributions.

Examen du 16 décembre 2015. 3h.

**Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.** Cependant, une feuille A4 recto verso, nominative, manuscripte à l'encre bleue, sera autorisée. Elle pourra contenir des informations sur le cours et les td.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

**Les exercices sont indépendants. L'énoncé comporte quatre pages.**

**Début de l'épreuve.**

**Exercice 1. :** Soit E l'espace de Banach des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$. Soit $k : [0;1] \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [0;1]$, on ait, pour tout $y \in [0;1]$, $k(x;y) \geq 0$ et

$$\int_0^1 k(x;y)\, dy \;=\; 1\,. \tag{1}$$

Pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [0;1]$, on pose

$$(Qf)(x) \;=\; \int_0^1 k(x;y)\, f(y)\, dy\,.$$

1. Montrer que $Q$ est une application linéaire continue de E dans E.
2. Soit $1\!\!1$ la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$. Calculer $Q1\!\!1$. Que dire de $\|Q\|$, la norme de $Q$ comme application linéaire continue ?
3. Soit $f, g \in \mathrm{E}$ telles que $Qf = f$ et $f = (I-Q)g$, $I$ étant l'application identité sur $E$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nf = g - Q^n g$. En déduire que $f = 0$. (Indication : On pourra montrer que $(n\|f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.)
4. Soit $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(I-Q)$ le noyau de $I-Q$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(I-Q)$ l'image de $I-Q$. Montrer que $\mathrm{N} \cap \mathrm{F} = \{0\}$.
5. On **suppose** désormais que $\mathrm{E} = \mathrm{N} + \mathrm{F} = \{g+h; g \in \mathrm{N}, h \in \mathrm{F}\}$. Pour $f \in \mathrm{E}$, on considère la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

   $$u_n(f) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Q^k f\,.$$

   Étudier la limite de cette suite lorsque $f \in \mathrm{N}$ et lorsque $f \in \mathrm{F}$. En déduire que, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note par $\Pi f$ sa limite.
6. Montrer que $\Pi$ est linéaire continue sur E. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus).

**Exercice 2. :** On cherche une fonction $u \in C^1([0;1];\mathbb{R})$ vérifiant

$$u(0) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0;1]\,,\; u'(t) \;=\; u(t)\sin\big(u'(t)\big)\,, \tag{2}$$

où $u'(x)$ est la dérivée de $u$ au point $x$. Soit $E$ l'espace vectoriel réel $C^1([0;1];\mathbb{R})$ des fonctions réelles de classe $C^1$ sur $[0;1]$ muni de la norme

$$\|v\|_E \;=\; \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty\,,\; \|w\|_\infty \;=\; \sup_{t\in[0;1]} |w(t)|\,,\ \text{pour}\, v\,, w \in E\,.$$

On **rappelle** que $C = C^0([0;1];\mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues sur $[0;1]$, est complet pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit $F : E \to E$ définie par, pour $v \in E$,

$$\forall t \in [0;1]\,,\; (Fv)(t) \;=\; \int_0^t v(s)\cdot\sin\big(v'(s)\big)\,ds\,. \tag{3}$$

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
2. Montrer que $F$ est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans $E$).
3. Soit $v, w \in E$. Montrer que

$$\big\|Fv - Fw\big\|_\infty \;\leq\; \|v - w\|_\infty\cdot\|v'\|_\infty + \|v' - w'\|_\infty\cdot\|w\|_\infty\,, \tag{4}$$

$$\big\|(Fv)' - (Fw)'\big\|_\infty \;\leq\; \|v - w\|_\infty\cdot\|v'\|_\infty + \|v' - w'\|_\infty\cdot\|w\|_\infty\,. \tag{5}$$

4. Soit $r \in ]0;1/4[$. Montrer que la restriction de $F$ à la boule $B_E(0;r]$, la boule fermée de centre 0 et de rayon $r$ pour la norme $\|\cdot\|_E$ de $E$, est contractante.
5. Montrer que $(E;\|\cdot\|_E)$ est complet.
6. Montrer que, dans $B_E(0;r]$, $F$ admet un unique point fixe $v_0$.
7. Montrer que $v_0 = 0$.
8. En déduire que l'équation différentielle (2) admet une unique solution dans $B_E(0;1/2]$ que l'on précisera.

**Exercice 3. :** Sur $\mathbb{R}^2$, on note par $|\cdot|$ la norme euclidienne définie, pour $x = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$, par $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(|x|)$, si $x \neq (0;0)$ et $f(x) = 0$ sinon. Elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Pour $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$(\Delta h)(x) \;=\; \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(x)\,.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (1/2)\ln(|x|^2 + 1/n)$. Avec les notations du cours, montrer que $(T_{f_n})_n$ converge vers $T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que, tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$(\Delta f_n)(x) \;=\; \frac{2}{n}\big(|x|^2 + 1/n\big)^{-2}\,.$$

3. Montrer $(T_{\Delta f_n})_n$ converge vers $c^{-1}\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, pour un réel $c \neq 0$. En déduire que $T_{cf}$ est une solution fondamentale du laplacien $\Delta$.
4. En déduire que le Laplacien dans $\mathbb{R}^2$ est hypoelliptique.
5. On considère l'application linéaire $S : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$S(\varphi) \;=\; \int_0^1 \varphi(x;x)\,dx\,.$$

   Montrer que $S$ est une distribution à support compact.
6. En déduire une solution de l'équation d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par $\Delta T = S$ de la forme $T = T_g$, pour une fonction localement intégrable $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ que l'on précisera.

**Exercice 4. :** Soit $\mathrm{H} = \mathrm{H}^1(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ l'espace de Sobolev des fonctions $u \in \mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ dont la dérivée au sens des distributions appartient à $\mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$. Précisément, $u \in \mathrm{H}$ si $u \in \mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ et s'il existe $g \in \mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ telle que $(T_u)' = T_g$. On note $u' = g$. On rappelle que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u\,;\,v\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{u(x)}\,v(x)\,dx \;+\; \int_{\mathbb{R}} \overline{u'(x)}\,v'(x)\,dx\,.$$

On note par $\|\cdot\|_{\mathrm{H}}$ la norme associée. Soit $\mathrm{H}_{2\pi} = \mathrm{H}^1(]0;2\pi[;\mathbb{C})$ l'espace de Sobolev d'indice 1 sur $]0;2\pi[$ muni du produit scalaire

$$\langle u\,;\,v\rangle_{2\pi} \;=\; \int_0^{2\pi} \overline{u(x)}\,v(x)\,dx \;+\; \int_0^{2\pi} \overline{u'(x)}\,v'(x)\,dx\,.$$

On note la norme associée par $\|\cdot\|_{H_{2\pi}}$. On rappelle que si $u \in \mathrm{H}$ alors (la restriction à $]0;2\pi[$ de) $u \in \mathrm{H}_{2\pi}$.
Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $g_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g_a(t) = \sin(at)$. On considère la fonction $F_a : H \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F_a(u) \;=\; \|u\|_{\mathrm{H}}^2 \;+\; \|u - g_a\|_{2\pi}^2\,.$$

On **admet** que, pour $b > 0$, la masse de Dirac en $b$, c'est-à-dire la distribution définie par $\delta_b : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(b)$, n'appartient pas à $\mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ (i.e. il n'existe aucune fonction $g \in \mathrm{L}^2(]0;+\infty[;\mathbb{C})$ telle que $T_g = \delta_b$).

1. On considère la fonction localement intégrable $h_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_a(t) = g_a(t)$, si $t < 2\pi$, et par 0 sinon. Calculer $(T_{h_a})'$. (Indication : on pourra utiliser la formule des sauts).
2. Montrer que $h_a \in \mathrm{H}$ si et seulement si $a \in \{k/2; k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Montrer que $F_a$ est bien définie et positive.
4. On note par $I$ la borne inférieure de $F_a$ sur H. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in \mathrm{H}$, tel que $F_a(u_n) < I + 1/n$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans H.
6. En déduire qu'il existe une injection croissante $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathrm{H}$ tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $v$ dans H et

$$\|v\|_{\mathrm{H}} \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_{\mathrm{H}} \,. \tag{6}$$

7. Montrer qu'il existe une injection croissante $\gamma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathrm{H}_{2\pi}$ tels que la suite $(v_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $w$ dans $\mathrm{H}_{2\pi}$ et que

$$\|w\|_{\mathrm{H}_{2\pi}} \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \|v_{\gamma(n)}\|_{\mathrm{H}_{2\pi}} \,. \tag{7}$$

8. Montrer que $w$ coïncide avec la restriction de $v$ à $]0; 2\pi[$. (Indication : on pourra utiliser le fait que $\mathcal{D}(]0; 2\pi[; \mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{H}_{2\pi}$).
9. En déduire que $F_a(v) = I$.
10. Montrer que la fonction nulle est l'unique minimum de $F_0$.
11. Montrer que la fonction nulle n'est pas un minimum de $F_{1/2}$. (Indication : on pourra comparer $F_{1/2}(0)$ et $F_{1/2}((1/2)h_{1/2})$.)
12. Montrer que $F_a$ est continue sur H.
13. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(]0; +\infty[; \mathbb{C})$ telle que $F_a(\varphi) < I + \epsilon$.
14. Montrer que, pour tout $b > 0$, $\delta_b \notin \mathrm{L}^2(]0; +\infty[; \mathbb{C})$.

**Fin de l'épreuve.**

Corrigé partiel et barême.

**Barème :** Nombre total de points : 43 ; 13 points hors barême. Le nombre de points sur 30 est ramené en une note sur 20 (en le multipliant par 2/3). La moyenne se situe donc à 15 points.
Exercice 1 : 7 points ; Exercice 2 : 9 points ; Exercice 3 : 8 points ; Exercice 4 : 19 points.

**Exercice 1.**
1. Il y a trois choses à montrer : $Qf$ est une fonction continue sur $[0;1]$, lorsque $f \in E$ ; $Q(\lambda f+g) = \lambda Qf + Qg$, pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (linéarité de $Q$) ; $Q$ est continue.
Soit $f \in E$. La fonction $[0;1]^2 \ni (x;y) \mapsto k(x;y)f(y)$ est continue des deux variables. Par un résultat sur les intégrales définies dépendant d'un paramètre, $Qf$ est continue sur $[0;1]$.
Alternativement, on peut aussi dire la chose suivante. Il suffit de montrer que, si $(x_n)_n$ tend vers $x$ dans $[0;1]$, alors $(Qf(x_n))_n$ tend vers $Qf(x)$. Pour ce faire, on remarque que, $k$ étant continue sur un compact (de $\mathbb{R}^2$), elle est bornée. Il en est de même de $f$, qui est continue sur $[0;1]$. Donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n$, pour tout $y \in [0;1]$,

$$|k(x_n;y)f(y)| \ \le\ M$$

et la fonction constante $[0;1] \mapsto M$ est intégrable sur $[0;1]$. D'autre part, pour tout $y \in [0;1]$, $(k(x_n;y)f(y))_n$ converge vers $k(x;y)f(y)$ car $k$ est continue par rapport à la première variable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que $(Qf(x_n))_n$ tend vers $Qf(x)$.
Soit $x \in [0;1]$. Par linéarité de l'intégrale, on a $(Q(\lambda f+g))(x) = \lambda(Qf)(x) + (Qg)(x)$. Ceci étant vrai, pour tout $x \in [0;1]$, on a $Q(\lambda f+g) = \lambda Qf + Qg$.
Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$,

$$|(Qf)(x)| \ \le\ \int_0^1 |k(x;y)|\cdot|f(y)|\,dy \ \le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x;y)|\,dy \ =\ \|f\|_\infty \int_0^1 k(x;y)\,dy \ =\ \|f\|_\infty\,,$$

d'après les propriétés de $k$ ($k \ge 0$ et (1)). Ceci étant vrai pour tout $x \in [0;1]$, $\|Qf\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Comme on sait déjà que $Q$ est linéaire, cette dernière inégalité prouve que $Q$ est continue et que $\|Q\| \le 1$.
2. Pour tout $x \in [0;1]$, $(Q\mathbb{1})(x) = 1$, d'après (1). Donc $Q\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Comme $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$,

$$\|Q\| \ =\ \sup_{\|f\|_\infty=1} \|Qf\|_\infty \ \ge\ \|Q\mathbb{1}\|_\infty \ =\ 1\,.$$

D'après la question 1, on en déduit que $\|Q\| = 1$.
3. Comme $Qf = f$, on vérifie par récurrence que $Q^n f = f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété $\mathcal{P}(n) = (nf = (I - Q^n)g)$ est vraie au rang $n = 1$, par définition de $f$ et $g$. Supposons qu'elle soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors $(n+1)f = g - Q^n g + Q^n f = g - Q^n g + Q^n(g - Qg) = g - Q^{n+1}g$. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n$.
Pour des applications $A$ et $B$, linéaires continues sur $E$, on sait que $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. Donc, par récurrence, on a, pour tout $n$, $\|Q^n\| \le \|Q\|^n$. Pour tout $n$, on a donc, par $\mathcal{P}(n)$,

$$n\|f\|_\infty \ \le\ \|g\|_\infty + \|Q^n g\|_\infty \ \le\ \|g\|_\infty + \|Q^n\|\cdot\|g\|_\infty \ \le\ \|g\|_\infty + \|Q\|^n\cdot\|g\|_\infty \ =\ 2\|g\|_\infty\,.$$

Pour $n > 0$, $0 \leq \|f\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty n^{-1}$, le dernier terme tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'où $\|f\|_\infty = 0$ et, comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, $f = 0$.
Si l'on ne souvient pas de l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, on peut quand même facilement montrer $\|Q^n\| \leq \|Q\|^n$, pour tout $n$, par récurrence. Il suffit d'écrire, pour $f \in E$,

$$\|Q^{n+1} f\|_\infty \; = \; \|QQ^n f\|_\infty \; \leq \; \|Q\| \cdot \|Q^n f\|_\infty \; \leq \; \|Q\| \cdot \|Q\|^n \cdot \|f\|_\infty \, .$$

pour montrer l'hérédité de la propriété.
4. Les sous-espaces vectoriels $N$ et $F$ contiennent 0 donc $\{0\} \subset N \cap F$. Soit $f \in N \cap F$. Il existe donc $g \in E$ tel que $f = (I - Q)g$ et $Qf = f$. D'après le 3, $f = 0$. Donc $N \cap F \subset \{0\}$. D'où $N \cap F = \{0\}$.
5. Soit $f \in N$. On a donc $Qf = f$ et par récurrence $Q^n f = f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n(f) = n^{-1} \cdot nf = f$. La suite $(u_n(f))_n$ est constante égale à $f$ donc converge vers $f$ (dans $E$). Soit $f \in F$. Il existe $g \in E$ telle que $f = (I - Q)g$. Donc

$$nu_n(f) \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(g - Qg) \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} Q^k g \; - \; \sum_{k=1}^{n} Q^k g \; = \; g \; - \; Q^n g \, .$$

Donc, comme au 3,

$$0 \; \leq \; \|nu_n(f)\|_\infty \; \leq \; \|g\|_\infty \; + \; \|Q^n g\|_\infty \; \leq \; 2\|g\|_\infty \, .$$

Donc $\|u_n(f)\|_\infty \leq 2n^{-1}\|g\|_\infty$. La suite $(u_n(f))_n$ converge donc vers 0, par le théorème des gendarmes.
Comme $E = N + F$ par hypothèse, pour $f \in E$, il existe $g \in N$ et $h \in F$ tels que $f = g + h$. Comme, pour tout $n$, $u_n$ est linéaire $u_n(f) = u_n(g) + u_n(h)$. Les deux derniers termes convergeant vers $g$ et 0, respectivement, $(u_n(f))_n$ converge vers $g$.
6. Pour tout $n$, $u_n$ est linéaire et, pour $f \in E$,

$$\|u_n(f)\|_\infty \; \leq \; n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|Q^k f\|_\infty \; \leq \; n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|Q^k\| \|f\|_\infty \; \leq \; n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|Q\|^k \|f\|_\infty \; = \; \|f\|_\infty \, . \tag{8}$$

Donc $u_n$ est continue sur le Banach $E$. De plus, par le 5., $(u_n)_n$ converge simplement vers une application $\Pi$. Par un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus, $\Pi$ est une application linéaire continue.
Ce n'était pas demandé mais ce corollaire donne aussi

$$\|\Pi\| \; \leq \; \liminf_{n \to \infty} \|u_n\| \; \leq \; \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|u_n\| \; < \; +\infty \, .$$

En fait, on a montré plus haut que $\|u_n\| \leq 1$, pour tout $n$. Donc $\|\Pi\| \leq 1$. Comme $\mathbb{1} \in N$, $\Pi \mathbb{1} = \mathbb{1}$ et donc $\|\Pi\| \geq 1$. D'où $\|\Pi\| = 1$.
On aurait pu éviter d'utiliser le théorème de Banach-Steinhaus pour montrer que $\Pi$ est continue, après avoir montré que $\Pi$ est linéaire. Il suffit en effet de passer à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités (8) pour trouver $\|\Pi f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, ce qui montre que $\Pi$ est continue.

**Exercice 2.**
1. Comme sinus est dérivable, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, par le théorème des accroissements finis, l'existence d'un $c$ compris entre $x$ et $y$ tel que $\sin(x)-\sin(y) = (x-y)\sin'(c)$. Comme $\sin'$ est bornée par 1, on en déduit que

$$|\sin(x) - \sin(y)| \;\leq\; |x-y| \cdot |\sin'(c)| \;\leq\; |x-y|\,.$$

2. Soit $v \in E$. La fonction $[0;1] \ni s \mapsto v(s)\sin(v'(s))$ est continue donc $Fv$, sa primitive qui s'annule en 0, est de classe $C^1$. D'où $Fv \in E$.
3. Pour tout $s \in [0;1]$, en utilisant 1.,

$$\begin{aligned}
& \bigl|v(s)\sin(v'(s)) \,-\, w(s)\sin(w'(s))\bigr| \\
=\; & \bigl|v(s)\sin(v'(s)) \,-\, w(s)\sin(v'(s)) \,+\, w(s)\sin(v'(s)) \,-\, w(s)\sin(w'(s))\bigr| \\
\leq\; & |v(s) \,-\, w(s)| \cdot \bigl|\sin(v'(s))\bigr| \,+\, |w(s)| \cdot \bigl|\sin(v'(s)) \,-\, \sin(w'(s))\bigr| \\
\leq\; & |v(s) \,-\, w(s)| \cdot |v'(s)| \,+\, |w(s)| \cdot |v'(s) \,-\, w'(s)| \\
\leq\; & \|v \,-\, w\|_\infty \cdot \|v'\|_\infty \,+\, \|w\|_\infty \cdot \|v' \,-\, w'\|_\infty\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Pour tout $t \in [0;1]$, on obtient en intégrant l'inégalité (9),

$$\bigl|(Fv)(t) \,-\, (Fw)(t)\bigr| \;\leq\; \|v \,-\, w\|_\infty \cdot \|v'\|_\infty \,+\, \|w\|_\infty \cdot \|v' \,-\, w'\|_\infty\,.$$

Comme le terme de droite est indépendant de $t$, on en déduit la formule (4) de l'énoncé. Comme le terme de droite dans l'inégalité (9) est indépendant de $s \in [0;1]$ et que le terme de gauche est $|(Fv)'(s) - (Fw)'(s)|$, on en déduit la formule (5) de l'énoncé.
4. Soit $v, w \in B_E(0;r]$. Par 3 et la définition de $\|\cdot\|_E$, on a

$$\begin{aligned}
\bigl\|Fv \,-\, Fw\bigr\|_E \;&\leq\; 2\|v \,-\, w\|_\infty \cdot \|v'\|_\infty \,+\, 2\|w\|_\infty \cdot \|v' \,-\, w'\|_\infty \\
&\leq\; 2\|v \,-\, w\|_E \cdot \|v\|_E \,+\, 2\|w\|_E \cdot \|v \,-\, w\|_E \\
&\leq\; 4r\|v \,-\, w\|_E\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Comme $0 \leq 4r < 1$, la restriction de $F$ à $B_E(0;r]$ est contractante.
5. Soit $(v_n)_n$ une suite de Cauchy dans $E$. On a donc

$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,;\; \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2\,,\, \|v_{n+p} \,-\, v_n\|_E \;\leq\; \epsilon\,. \tag{11}$$

Comme $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_E$, on déduit de (11) que $(v_n)_n$ et $(v_n')_n$ sont des suites de Cauchy dans le complet $C$. Elles convergent donc vers certains $v$ et $w$ respectivement. Comme $(v_n)_n$ converge uniformément vers $v$, $v$ est continue. Comme $(v_n')_n$ converge uniformément vers $w$, $v$ est dérivable et $v' = w$. En particulier, $v'$ est continue. D'où $v \in E$. De plus, pour tout $n$,

$$\|v_n - v\|_E \;=\; \|v_n - v\|_\infty \,+\, \|v_n' - v'\|_\infty \;=\; \|v_n - v\|_\infty \,+\, \|v_n' - w\|_\infty \;\to\; 0\,,$$

quand $n \to \infty$, donc la suite $(v_n)_n$ converge vers $v$ dans $E$. Ceci étant vrai pour toute suite de Cauchy, $E$ est complet.
6. $B_E(0;r]$ est un fermé dans l'espace complet $E$ (cf. 5). Donc $B_E(0;r]$ est complète. De plus, $F$ conserve $B_E(0;r]$. En effet, si $v \in B_E(0;r]$, on a, par (10) avec $w = 0$,

$\|Fv\|_E \leq 4r\|v\|_E \leq \|v\|_E \leq r$ et $Fv \in B_E(0;r]$. Comme la restriction de $F$ à $B_E(0;r]$ est contractante (cf. 4), on peut appliquer le théorème de Picard qui prouve que $F$ a un unique point fixe $v_0$ dans $B_E(0;r]$.
7. Comme $F0 = 0$, $0 \in B_E(0;r]$, pour $r \in [0;1/4[$, l'unicité du point fixe de $F$ dans $B_E(0;r]$ (cf. 6) donne $v_0 = 0$.
8. $u$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si $u \in E$ et $u$ est un point fixe de $F$. Dans $B_E(0;1/2]$, $F$ a un unique point fixe, par 6., donc l'équation différentielle a un unique solution dans $B_E(0;1/2]$ et c'est $v_0 = 0$ (par 7).

**Exercice 3.**
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^2 \ni (x_1;x_2) \mapsto x_1^2+x_2^2+n^{-1}$ est continue et strictement positive. Comme ln est continue, $f_n$ l'est sur $\mathbb{R}^2$. Elle est donc localement intégrable. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$,

$$\left|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)\right| \leq \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx\,. \tag{12}$$

Pour $|x| \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq f_n(x) \leq (1/2)\ln(|x|^2+1)$. Pour $0 < |x| \leq 1$, $f(x) \leq f_n(x) \leq (1/2)\ln(|x|^2+1)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0$, $g(x) = |f(x)|\,|\varphi(x)|$ si $0 < |x| \leq 1$, et $g(x) = (1/2)\ln(|x|^2+1)|\varphi(x)|$. Comme $f$ est localement intégrable et $\varphi$ est bornée et à support compact, $g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)| \leq g(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la suite $(f_n(x))_n$ tend vers $f(x)$, par continuité de ln. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale figurant dans (12) tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} T_{f_n}(\varphi) = T_f(\varphi)$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, la suite $(T_{f_n})_n$ converge vers $T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^2 \ni (x_1;x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + n^{-1}$ est de classe $C^2$ et strictement positive. Comme ln est de classe $C^2$, $f_n$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{|x|^2 + n^{-1}}\,, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2}\,.$$

De même,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) = \frac{x_2}{|x|^2 + n^{-1}}\,, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2^2}(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2}\,.$$

Donc

$$(\Delta f_n)(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2 + n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2} = \frac{2n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2}\,.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, en faisant le changement de variable $y = \sqrt{n}\,x$,

$$T_{\Delta f_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2n^{-1}}{\left(|x|^2 + n^{-1}\right)^2}\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2n^{-1}}{n^{-2}\left(|y|^2 + 1\right)^2}\,\varphi(y/\sqrt{n})\,\frac{dy}{n}\,.$$

On a donc

$$T_{\Delta f_n}(\varphi) = 2\int_{\mathbb{R}^2} \left(|y|^2 + 1\right)^{-2}\varphi(y/\sqrt{n})\,dy\,.$$

Soit $c > 0$ tel que

$$c^{-1} = 2\int_{\mathbb{R}^2} \left(|y|^2 + 1\right)^{-2} dy\,,$$

Comme $\varphi$ est bornée et $\mathbb{R}^2 \ni y \mapsto (|y|^2 + 1)^{-2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, comme la suite $(\varphi(y/\sqrt{n}))_n$ tend vers $\varphi(0)$, pour tout $y$, la suite $(T_{\Delta f_n}(\varphi))_n$ tend vers $c^{-1}\varphi(0) = c^{-1}\delta_0\varphi$, par le théorème de convergence dominée.
On a vu au 1 que la suite $(T_{f_n})_n$ converge vers $T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Comme les dérivations partielles sont continues sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ (cf. cours), $\Delta$ est continu sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ donc $(\Delta T_{f_n})_n$ converge vers $\Delta T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Comme, pour tout $n$, $f_n$ est de classe $C^2$, $\Delta T_{f_n} = T_{\Delta f_n}$ (cf. cours). On en déduit donc $\Delta T_f = c^{-1}\delta_0$. Par linéarité, $\Delta T_{cf} = \delta_0$ et $T_{cf}$ est une solution fondamentale du laplacien.
4. Comme ln est de classe $C^\infty$ et comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni (x_1; x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ est de classe $C^\infty$ et strictement positive, $cf$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Par le cours, le laplacien est hypoelliptique.
5. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $|S(\varphi)| \leq \sup|\varphi|$. Donc, pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^2$, il existe $C_K > 0$ (on peut prendre $C_K = 1$), tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ à support dans $K$, on ait $|S(\varphi)| \leq p_{K;0}(\varphi)$. $S$ est donc une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $K = [0;1]^2$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ tel que $K \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, $S(\varphi) = 0$. Donc $\mathbb{R}^2 \setminus K$ est un ouvert de nullité pour $S$. D'où $\operatorname{supp} S \subset K$. Comme $\operatorname{supp} S$ et $K$ compact, $\operatorname{supp} S$ est compact.
On peut calculer le support de $S$ de la façon suivante. Soit $K_0 = \{(x;x) \in \mathbb{R}^2; x \in [0;1]\}$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ tel que $K_0 \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, $S(\varphi) = 0$. Donc $\operatorname{supp} S \subset K_0$.
Supposons que, pour un $x_0 \in [0;1]$, $(x_0;x_0) \in K_0 \setminus \operatorname{supp} S$. Comme $\operatorname{supp} S$ est fermé, il existe $\delta > 0$ tel que le disque ouvert de centre $(x_0;x_0)$ et de rayon $\delta$ ne rencontre pas $\operatorname{supp} S$. Ce disque est donc un ouvert de nullité pour $S$. Par le cours, on peut construire une fonction positive $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ à support dans ce disque et valant 1 sur le disque de rayon $\delta/2$. On a donc $S(\varphi_0) = 0$. Comme la fonction $[0;1] \ni x \mapsto \varphi_0(x;x)$ est continue, positive et non nulle, la théorie des intégrales définies dit que $S(\varphi_0) > 0$. Contradiction. Donc $\operatorname{supp} S = K_0$.
6. D'après le cours, $T = T_{cf} * S$ est bien définie, puisque $S$ est à support compact, et est une solution de $\Delta T = S$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, la fonction $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto S_y(\varphi(x+y))$ appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ donc

$$T(\varphi) \;=\; c\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\Big(\int_0^1 \varphi(x_1+t; x_2+t)\,dt\Big)\,dx\,.$$

Comme $f$ est localement intégrable, on peut appliquer le théorème de Fubini et faire un changement de variables.

$$\begin{aligned} T(\varphi) \;&=\; c\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x_1+t; x_2+t)\,dx\Big)\,dt \\ &=\; c\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}^2} f(y_1-t; y_2-t)\varphi(y)\,dy\Big)\,dt\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Soit $K_0 = \{(x;x) \in \mathbb{R}^2; x \in [0;1]\}$ et $g : \mathbb{R}^2 \setminus K_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) \;=\; c\int_0^1 f(x_1-t; x_2-t)\,dt\,.$$

Soit $R > 0$. On a, par Fubini et un changement de variables,

$$\int_{[-R;R]^2} |g(x)|\,dx \ \leq \ c\int_{[-R;R]^2\times[0;1]} |f(x_1-t;x_2-t)|\,dxdt \ = \ c\int_V |f(y)|\,dydt\,,$$

où $V$ est une partie de $[-R-1;R]^2\times[0;1]$. Donc

$$\int_{[-R;R]^2} |g(x)|\,dx \ \leq \ c\int_{[-R-1;R]^2} |f(y)|\,dy \ < \ +\infty\,,$$

puisque $f$ est localement intégrable. $g$ est donc localement intégrable. De plus, par (13) et le théorème de Fubini,

$$T(\varphi) \ = \ c\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_0^1 f(y_1-t;y_2-t)\,dt\Big)\varphi(y)\,dy \ = \ T_g(\varphi)\,.$$

D'où $T = T_g$.