EISTI, ING2, Théorie des distributions.

Examen de février 2016. 3h.

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Cependant, une feuille A4 recto verso, nominative, manuscripte à l'encre bleue, sera autorisée. Elle pourra contenir des informations sur le cours et les td.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées.

L'énoncé comporte 5 exercices et 5 pages. Les exercices sont indépendants les uns des autres à l'exception de l'exercice 4. Pour traiter les questions de l'exercice 4, on pourra utiliser les résultats de l'exercice 5 sans les démontrer. D'autre part, on pourra utiliser les résultats donnés à la fin de l'énoncé.

Le barème est indicatif. La note finale sur 20 sera 2/3 du nombre de points obtenus (la moyenne est donc à 15 points).

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (6 points.) Pour $p \in [1;+\infty[$, on note par ℓ^p l'espace vectoriel réel des suites réelles $a = (a(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)|^p \ < \ +\infty \,,$$

muni de la norme $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|a\|_p \ = \ \big\|(a(k))_{k\in\mathbb{N}^*}\big\|_p \ = \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)|^p\right)^{1/p} .$$

On note par $(\ell^p)'$ le dual topologique de ℓ^p.
Soit $b = (1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $b_n = (b_n(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $b_n(k) = 1/k$, si $k \leq n$, et $b_n(k) = 0$, si $k > n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \in \ell^1$ et $b_n \in \ell^2$. Montrer que $b \in \ell^2$ et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers b dans ℓ^2, c'est-à-dire que $\lim \|b_n - b\|_2 = 0$.
2. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$. Donner un élément de $\ell^2 \setminus \ell^1$.
3. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère les formes linéaires L_N et L sur ℓ^1 données par

$$L_N(a) \ = \ \sum_{k=1}^{N} a(k) \quad \text{et} \quad L(a) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \,.$$

   Montrer que $L \in (\ell^1)'$ et $L_N \in (\ell^1)'$. Montrer que L_N est continue sur ℓ^1 muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que L n'est pas continue sur ℓ^1 muni de la norme $\|\cdot\|_2$. (Indication : on pourra utiliser 1.)

4. Montrer que, pour tout $a \in \ell^1$, $(L_N(a))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $L(a)$.
5. Montrer que ℓ^1 muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.)

Exercice 2. : (5 points.) Pour $\epsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on pose

$$\Big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\Big)(\varphi) \;=\; \lim_{\eta\to 0^+}\int_{x\in\mathbb{R}\,,\,|x|\geq\eta}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \text{et} \quad V_\epsilon(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x-i\epsilon}\,dx\,.$$

On rappelle que la masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$ est la distribution définie par $\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \varphi(0)$.

1. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, montrer que $V_\epsilon(\varphi)$ et $(\mathrm{vp}(1/x))(\varphi)$ sont bien définis. Montrer que $V_\epsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $\mathrm{vp}(1/x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{x\varphi(x)}{x^2+n^{-2}}\,dx \;=\; \Big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\Big)(\varphi)\,.$$
(Indication : on pourra faire une intégration par parties.)
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x^2+n^{-2}}\,dx \;=\; \pi\delta_0(\varphi)\,.$$
4. En déduire que la suite $(V_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vers $\mathrm{vp}(1/x) + i\pi\delta_0$.

Exercice 3. : (4 points.) On rappelle que, pour une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on note par T_u^t l'application

$$\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \;\mapsto\; \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)u(x)\,dx\,,$$

lorsque cette dernière est bien définie, et par T_u sa restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
On désigne par $\mathrm{H}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'espace de Sobolev des fonctions $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ dont la dérivée au sens des distributions appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Précisément, $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et s'il existe $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que $(T_u)' = T_g$.
La masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$ est la distribution tempérée définie par $\delta_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \varphi(0)$. On note encore par δ_0 sa restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, qui est une distribution. On **admet** que la masse de Dirac en 0 n'appartient pas à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ dans le sens suivant : il n'existe aucune fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que $T_g^t = \delta_0$ ou $T_g = \delta_0$.
On considère les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_1(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $f_1(x) = e^{-x}$, si $x > 0$, et $f_2(x) = e^{-|x|}$. On remarque que $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

1. Vérifier que $T_{f_1}^t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $T_{f_2}^t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
2. Déterminer $(T_{f_1}^t)'$ et $(T_{f_2}^t)'$.
3. En déduire qu'il existe une fonction $g_1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, que l'on précisera, telle que la transformée de Fourier $\mathcal{F}'(T_{f_1}^t)$ de $T_{f_1}^t$ vérifie $\mathcal{F}'(T_{f_1}^t) = T_{g_1}^t$.
4. Montrer que $T_{f_1}^t \notin \mathrm{H}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer que $T_{f_2}^t \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

5. Montrer que $\mathcal{F}'(T^t_{f_1}) \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Exercice 4. : (17 points.) Soit E l'espace de Banach réel de dimension infinie des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$, pour $f \in \mathrm{E}$. Soit $k : [0;1]\times[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [0;1]$, on ait, pour tout $y \in [0;1]$, $k(x;y) \geq 0$ et

$$\int_0^1 k(x;y)\,dy \;=\; 1\,. \tag{1}$$

Pour $f \in \mathrm{E}$, on définit une fonction Qf sur $[0;1]$ en posant, pour $x \in [0;1]$,

$$(Qf)(x) \;=\; \int_0^1 k(x;y)\,f(y)\,dy\,. \tag{2}$$

On note par I l'application identité de E dans E et par $\|\cdot\|$ la norme des applications linéaires continues sur E. Pour $f \in E$ et $r \geq 0$, on note par $B_E(f;r[$ (resp. $\mathrm{B_E}(f;r])$) la boule ouverte (resp. fermée) de E centrée en f et de rayon r. On pose $\mathrm{B_E} = \mathrm{B_E}(0;1]$.
On rappelle qu'un polynôme réel p à deux variables réelles est une application $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}\cap[0;n]} \in \mathbb{R}^{n^2}$, tel que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p(x;y) \;=\; \sum_{k,\ell\in\mathbb{N}\cap[0;n]} a_{k,\ell}x^k y^\ell\,.$$

1. Soit $s : [0;1]\times[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $f \in \mathrm{E}$, on définit une fonction réelle Sf sur $[0;1]$ par la formule (2) avec k remplacée par s. Montrer que $Sf \in \mathrm{E}$. En déduire que S est une application linéaire continue de E dans E.
2. Montrer que Q est une application linéaire continue de E dans E, dont la norme $\|Q\|$ vaut 1. (Indication : On pourra utiliser la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$, notée $\mathbb{1}$).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|Q^n\| \leq 1$.
4. Soit $f, g \in \mathrm{E}$ telles que $Qf = f$ et $f = (I-Q)g$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nf = g - Q^n g$. En déduire que $f = 0$.
5. Soit $\epsilon > 0$.
   a). Montrer qu'il existe un polynôme réel p à deux variables réelles tel que

   $$\sup_{(x;y)\in[0;1]^2} \big|k(x;y) \,-\, p(x;y)\big| \;<\; \frac{\epsilon}{4}\,. \tag{3}$$

   (Indication : on pourra utiliser le théorème de Stone-Weierstrass.)
   b). Montrer que l'application Q_p, définie sur E par la formule (2) avec k remplacée par p, est linéaire continue de E dans E. Montrer que son image $\mathrm{Im}\,Q_p$ est de dimension finie et que $\|Q - Q_p\| \leq \epsilon/4$.
   c). Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{E}$ tels que

   $$Q_p(\mathrm{B_E}) \;\subset\; \bigcup_{j=1}^n \mathrm{B_E}(f_j;\epsilon/4[\,.$$

d). Montrer que

$$Q(\mathrm{B_E}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B_E}(f_j;\epsilon/2[\,.$$

6. Montrer que $Q(\mathrm{B_E})$ est relativement compacte.
7. Soit $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(I-Q)$, le noyau de $I-Q$, et $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(I-Q)$, l'image de $I-Q$. Montrer que $\mathrm{N} \cap \mathrm{F} = \{0\}$, que N et F sont fermés dans E, et que N est de dimension finie. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 5.)
8. Vérifier que $Q(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. La restriction $Q_{|\mathrm{F}}$ de Q à F est donc bien définie. On note par $\mathrm{B_F}$ la boule fermée de F centrée en 0 et de rayon 1. Montrer que $Q_{|\mathrm{F}}(\mathrm{B_F})$ est relativement compacte dans F.
9. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(I_{|\mathrm{F}}-Q_{|\mathrm{F}})$ de la restriction $I_{|\mathrm{F}}-Q_{|\mathrm{F}}$ de $I-Q$ à F est réduit à $\{0\}$. En déduire que $(I_{|\mathrm{F}}-Q_{|\mathrm{F}})^{-1}$ existe et est linéaire continu sur F. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 5.).
10. Soit $h \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{F}$ tel que $(I-Q)h = (I-Q)f$. En déduire qu'il existe un $g \in \mathrm{N}$ tel que $h = f+g$.
11. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{F}$, (somme directe).

Exercice 5. : (14 points.) Soit E un espace de Banach réel. On note par $\|\cdot\|$ sa norme, par $\mathrm{B_E}$ la boule fermée de E centré en 0 et de rayon 1 et par I l'application identique sur E. Pour $f \in \mathrm{E}$ et $r \geq 0$, on note par $\mathrm{B_E}(f;r[$ (resp. $\mathrm{B_E}(f;r])$ la boule ouverte (resp. fermée) de E centrée en f et de rayon r. On pose $\mathrm{B_E} = \mathrm{B_E}(0;1]$.
On considère une application linéaire continue T sur E telle que $T(\mathrm{B_E})$ soit relativement compacte (i.e. l'adhérence $\overline{T(\mathrm{B_E})}$ de $T(\mathrm{B_E})$ est compacte). En utilisant l'homogénéité, on vérifie que $T(\mathrm{B_E}(0;r])$ est relativement compacte, pour tout $r \geq 0$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose $\mathrm{N}_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$, le noyau de $\lambda I - T$, et $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{Im}(\lambda I - T)$, l'image de $\lambda I - T$.
On rappelle que, pour $f \in \mathrm{E}$ et G une partie de E, la distance de f à G est définie par

$$\mathrm{d}(f;\mathrm{G}) = \inf\{\|f - g\|\,;\ g \in \mathrm{G}\}$$

et qu'il s'agit d'une fonction continue de f.

1. Soit U une application linéaire continue sur E telle que son image $\mathrm{Im}\,U$ soit de dimension finie. Montrer que $U(\mathrm{B_E})$ est relativement compacte.
2. Soit $e' \in \mathrm{E}' \setminus \{0\}$, où E' est le dual topologique de E, et $v \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. Soit S l'application linéaire continue définie sur E par $Su = e'(u)v$.
   a). Montrer que $\mathrm{Ker}\,S = \mathrm{Ker}\,e'$, $\mathrm{Im}\,S = \mathrm{vect}\,\{v\}$. Montrer que $S(\mathrm{B_E})$ est relativement compacte.
   b). On suppose que $v \in \mathrm{Ker}\,e'$. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - S) = \{0\}$.
   c). On suppose que $e'(v) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(e'(v)I - S) = \mathrm{vect}\,\{v\}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0; e'(v)\}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - S) = \{0\}$.
3. Montrer que $\mathrm{B_1}$, la boule fermée de N_λ centré en 0 et de rayon 1, est compacte. En déduire que N_λ est de dimension finie.

4. Soit $u \in \mathrm{E}$. Montrer que $\mathrm{d}(u; \mathrm{N}_\lambda) = \mathrm{d}(u; \mathrm{N}_\lambda \cap \mathrm{B}_\mathrm{E}(0; 2\|u\|])$. En déduire qu'il existe $v \in \mathrm{N}_\lambda$ tel que $\|u - v\| = \mathrm{d}(u; \mathrm{N}_\lambda)$.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que la suite $((\lambda I - T)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n \in \mathrm{N}_\lambda$ tel que $\|u_n - v_n\| = \mathrm{d}(u; \mathrm{N}_\lambda)$.
   a). Vérifier que $((\lambda I - T)(u_n - v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f.
   b). On suppose qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi_1(n)} - v_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim \|u_{\varphi_1(n)} - v_{\varphi_1(n)}\| = +\infty$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$w_n = \frac{u_{\varphi_1(n)} - v_{\varphi_1(n)}}{\|u_{\varphi_1(n)} - v_{\varphi_1(n)}\|}.$$
   Vérifier que $\lim(\lambda I - T)w_n = 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(w_{\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(Tw_{\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $z \in \mathrm{E}$. Montrer que $z \in \mathrm{N}_\lambda$. Montrer que $\mathrm{d}(z; \mathrm{N}_\lambda) = \lambda \neq 0$. Il y a donc une contradiction.
   c). En déduire que la suite $(\|u_n - v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi_3(n)} - v_{\varphi_3(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(T(u_{\varphi_3(n)} - v_{\varphi_3(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in E$.
   d). Montrer que $(u_{\varphi_3(n)} - v_{\varphi_3(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\lambda^{-1}(\ell + f)$. En déduire que $f \in \mathrm{F}_\lambda$.
6. Montrer que F_λ est un fermé de E.
7. On suppose que $\mathrm{N}_\lambda = \{0\}$. On montre par l'absurde que $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{E}$. On suppose donc que $\mathrm{E}_1 := \mathrm{F}_\lambda \neq \mathrm{E}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}_n = (\lambda I - T)^n(\mathrm{E})$.
   a). Montrer que $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante de sous-espaces fermés de E.
   b). Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathrm{E}_n$ et $\mathrm{d}(u_n; \mathrm{E}_{n+1}) \geq 1/2$. (Indication : on pourra utiliser le lemme de Riesz.)
   c). Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\|Tu_{n+p} - Tu_n\| \geq \lambda/2$. (Indication : on pourra écrire $\lambda^{-1}(Tu_{n+p} - Tu_n) = -u_n + u_{n+p} - \lambda^{-1}(\lambda I - T)u_{n+p} + \lambda^{-1}(\lambda I - T)u_n$ et utiliser $\mathrm{d}(u_n; \mathrm{E}_{n+1}) \geq 1/2$.)
   d). Établir une contradiction.
8. Montrer que, si $\mathrm{N}_\lambda = \{0\}$, alors l'application linéaire $\lambda I - T$ est bijective et que son inverse $(\lambda I - T)^{-1}$ est linéaire continue sur E.

Fin de l'épreuve.

Lemme de Riesz : Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$ et soit M un sous-espace strict et fermé de E. Alors
$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists u \in \mathrm{E}\,,\ \|u\| = 1 \text{ et } \mathrm{d}(u; \mathrm{M}) \geq 1 - \epsilon\,.$$

Théorème de Stone-Weierstrass réel : Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.