Ω ens. Soit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \Omega$ et $\mathcal{C} = \mathcal{T}(\{A\})$. Pour $(c;d) \in (\overline{\mathbb{R}^+})^2$, soit $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(A) = c,\ \mu(\Omega \setminus A) = d,\ \mu(\Omega) = c+d.$$

On vérifie que μ est une mesure positive sur $\mathcal{T}$.

On a déjà $\mu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ tq.

$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset. \quad (*)$$

<u>1er cas</u> : Il existe $p \in \mathbb{N}$; $A_p = \Omega$. Alors, à cause de $(*)$, on a, pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$, $A_m = \emptyset$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p = \Omega$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A_p) + 0 = \mu(\Omega)$.

$$= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

<u>2è cas</u> : Il existe $p \in \mathbb{N}$; $A_p \in \{A ; \Omega \setminus A\}$. Par $(*)$, deux sous-cas se présentent :

* Il existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$ tq. $A_q \in \{A ; \Omega\setminus A\} \setminus \{A_p\}$. De plus, pour $n \notin \{p;q\}$, $A_n = \emptyset$. Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p \cup A_q$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A_p) + \mu(A_q) + 0 \overset{(*)}{=} \mu(A_p \cup A_q) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

* Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$, $A_n = \emptyset$. On a alors

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_p$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A_p) + 0 = \mu(A_p) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

<u>3ᵉ cas</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$.

On a alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0 = \mu(\emptyset) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Dans tous les cas,

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$