Lemme 2 : Soit $(A;B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ et $\mathcal{A} = \{A;B\}$.

Alors

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset;\ A;\ \Omega\setminus A;\ B;\ \Omega\setminus B;\ A\cup B;\ \Omega\setminus(A\cup B); \\ A\cap B;\ \Omega\setminus(A\cap B);\ A\setminus B;\ \Omega\setminus(A\setminus B);\ B\setminus A;\ \Omega\setminus(B\setminus A); \\ T;\ \Omega\setminus T;\ \Omega \end{array} \right. \quad (*)$$

où $A\setminus B = A\cap(\Omega\setminus B)$, $B\setminus A = B\cap(\Omega\setminus A)$ et $T = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

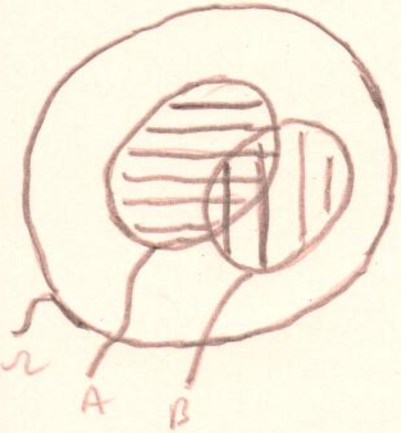
Preuve : Soit $\mathcal{T}$ l'ens. à dte de l'égalité $(*)$.

On a $\mathcal{A}\subset\mathcal{T}$; $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire dans Ω et $\emptyset\in\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ est aussi stable par réunion finie (cf. tableau ci-joint + une récurrence).

Soit $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On a

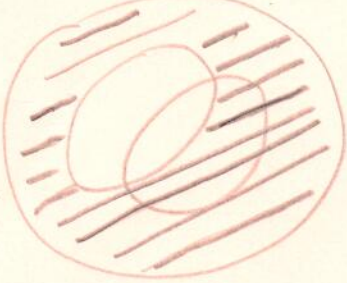
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{C\in\underbrace{\mathcal{T}}_{\text{ens. fini}}} \underbrace{\left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ A_n = C}} A_n\right)}_{=\emptyset \text{ ou } C}$$

Par la stabilité de $\mathcal{T}$ par réunion finie, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ est donc une tribu sur Ω qui contient $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω qui contient $\mathcal{A}$. Par stabilité de $\mathcal{T}'$ par passage au complémentaire dans Ω, par réunion finie et par intersection finie, $\mathcal{T}'$ doit contenir $\mathcal{T}$. D'où $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.



$A \cup B$

$A \cap B$



$\Omega \setminus A$

$\Omega \setminus B$

$A \setminus B$

$B \setminus A$

$\Omega \setminus (A \cup B)$

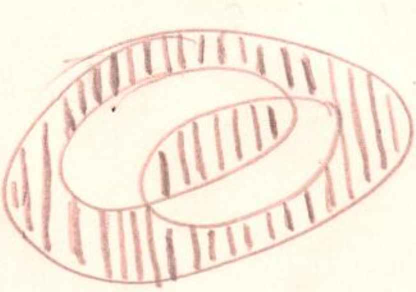
$\Omega \setminus (A \cap B)$

$\Omega \setminus (B \setminus A)$

$\Omega \setminus (A \setminus B)$

$T := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

↳ différence symétrique de A et B.



$\Omega \setminus T$

$\cup$	A	$\Omega\setminus A$	B	$\Omega\setminus B$	$A\cup B$	$\Omega\setminus(A\cup B)$	$A\cap B$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$A\setminus B$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$B\setminus A$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	T	$\Omega\setminus T$
A	A	Ω	$A\cup B$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$A\cup B$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	A	Ω	A	Ω	$A\cup B$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$A\cup B$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$
$\Omega\setminus A$		$\Omega\setminus A$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	Ω	$\Omega\setminus A$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$\Omega\setminus A$	Ω	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$
B			B	Ω	$A\cup B$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	B	Ω	$A\cup B$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	B	Ω	$A\cup B$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$
$\Omega\setminus B$				$\Omega\setminus B$	Ω	$\Omega\setminus B$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus B$	Ω	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$
$A\cup B$					$A\cup B$	Ω	$A\cup B$	Ω	$A\cup B$	Ω	$A\cup B$	Ω	$A\cup B$	Ω
$\Omega\setminus(A\cup B)$						$\Omega\setminus(A\cup B)$	$\Omega\setminus T$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus B$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$\Omega\setminus A$	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus T$
$A\cap B$							$A\cap B$	Ω	A	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	B	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	$A\cup B$	$\Omega\setminus T$
$\Omega\setminus(A\cap B)$								$\Omega\setminus(A\cap B)$	$\Omega\setminus(A\cap B)$	Ω	$\Omega\setminus(A\cap B)$	Ω	$\Omega\setminus(A\cap B)$	Ω
$A\setminus B$									$A\setminus B$	Ω	T	$\Omega\setminus(B\setminus A)$	T	$\Omega\setminus(B\setminus A)$
$\Omega\setminus(A\setminus B)$										$\Omega\setminus(A\setminus B)$	$\Omega\setminus(A\setminus B)$	Ω	Ω	$\Omega\setminus(A\setminus B)$
$B\setminus A$											$B\setminus A$	Ω	T	$\Omega\setminus(A\setminus B)$
$\Omega\setminus(B\setminus A)$												$\Omega\setminus(B\setminus A)$	Ω	$\Omega\setminus(B\setminus A)$
T													T	Ω
$\Omega\setminus T$														$\Omega\setminus T$

Ex. 38. Par le lemme 1, on a

$\mathcal{T}([0;1]) = \{\phi; [0;1]; \Omega \setminus [0;1]; \Omega\} = \{\phi; \Omega\} = \mathcal{T}_0$,

$\mathcal{T}(\{0\}) = \{\phi; \{0\};]0;1]; [0;1]\}$.

Par le lemme 2,

$\mathcal{T}(\{\{0\}; \{1\}\}) = \{\phi; \{0\};]0;1]; \{1\}; [0;1[; \{0;1\};]0;1[; [0;1]\}$,

$\mathcal{T}(\{[0; 1/2]; \{1/3\}\}) = \{\phi; [0;\tfrac{1}{2}];]\tfrac{1}{2};1]; \{\tfrac{1}{3}\}; [0;1] \setminus \{\tfrac{1}{3}\}; [0;\tfrac{1}{2}] \setminus \{\tfrac{1}{3}\}; \{\tfrac{1}{3}\} \cup]\tfrac{1}{2};1]; [0;1]\}$.