Travaux dirigés 1. Exercices ANAF, 2001/2002.

ESPACE VECTORIEL NORME (RAPPELS DU COURS DE LICENCE SOUS FORME D'EXERCICES).

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathbb{K}$ (muni de sa distance usuelle) est complet, et que les compacts de $\mathbb{K}$ sont les parties fermées et bornées.

Exercice 1. : Montrer que $\mathbb{K}^n$ muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

Exercice 2. : Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ($\mathbb{K}$-e.v.n en abrégé). Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) f est continue sur E.
ii) f est continue en 0.
iii) f est lipschitzienne : $\exists K \geq 0, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E,\ \forall x \in E$.

Exercice 3. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n, et soient F un s.e.v fermé dans E et G un s.e.v de dimension finie dans E. Prouver que $F + G$ est fermé. En déduire que tout s.e.v de dimension finie dans E est fermé.

Exercice 4. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n, et soit f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si, et seulement si, $\mathrm{Ker} f$ est fermé.

Exercice 5. : Déduire des exercices précédents les propriétés suivantes :
Une forme linéaire sur un e.v.n de dimension finie est toujours continue (ie. en dimension finie le dual algébrique concide avec le dual topologique, voir T.D. 2).
Toute application linéaire définie sur un e.v.n de dimension finie est continue.
Soit E un e.v.n quelconque de dimension n. Il existe une application linéaire bijective et bicontinue entre E et $\mathbb{K}^n$ (muni de la norme du "sup").
Dans un e.v de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Si E est un e.v.n de dimension finie, alors il est complet, et les compacts de E sont les parties fermées et bornées de E.

Exercice 6. : (*Théorème de Riesz*). Soit E un e.v.n. Montrer que les boules fermées de E sont compactes si, et seulement si, $\dim E < +\infty$.

Exercice 7. : On sait que, sur un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. L'objet de cet exercice est de démontrer la réciproque. A cet effet, on admet le résultat suivant.
Dans tout $\mathbb{K}$-e.v E, il existe une **base de Hamel**, *c'est-à-dire un système $\{e_i, i \in I\}$ tel que tout vecteur x de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire finie de vecteurs e_i.*
Donner un exemple simple de base de Hamel dans $\mathbb{R}[X]$.
1). Soit E un e.v.n de dimension infinie, soit $\{e_i, i \in I\}$ une base de Hamel dans E, et enfin soit $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable de vecteurs (distincts deux à deux) choisis

parmi les e_i. On considère sur E la forme linéaire ϕ définie par : $\phi(a_k) = \alpha_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ (pour le moment les α_k sont des scalaires quelconques), et (par exemple) $\phi(x) = 0$ pour tous les autres vecteurs de la base. Pourquoi a-t-on de cette faon défini une forme linéaire sur E ? Choisir maintenant les α_k de sorte que ϕ soit non continue.
Conclusion. *Sur un e.v.n de dimension infinie, il existe toujours des formes linéaires non continues. Autrement dit, en dimension infinie, le dual topologique est toujours strictement contenu dans le dual algébrique.*
2). Soit E un e.v.n tel que deux normes quelconques sur E soient toujours équivalentes, et soit f une forme linéaire quelconque sur E. Prouver que $x \mapsto \|x\|_E + |f(x)|$ est une norme sur E (on a noté $\|\cdot\|_E$ une norme quelconque sur E). En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 8. : Soit E un e.v.n. Prouver que E est complet si, et seulement si, toute série absolument convergente converge dans E, c'est-à-dire si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in E,\ \lim_{N \to +\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} x_n \right\| = 0.$$

Exercice 9. : Soient E, F deux espaces de Banach, soit D un sous-ensemble dense dans E, et soit enfin $(T_n)_n$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Démontrer que, si $(T_n d)_n$ converge dans F pour tout $d \in D$ et si $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, alors $(T_n x)_n$ converge dans F pour tout $x \in E$. Est-il nécessaire de supposer E complet ?

Exercice 10. : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v muni d'un produit scalaire $\phi(x, y)$. On note $\|x\| = (\phi(x, x))^{\frac{1}{2}}$ la norme associée à ϕ. Prouver la relation suivante, dite loi du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in E.$$

Exercice 11. : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n tel que sa norme $\|\cdot\|$ satisfasse à la loi du parallélogramme. L'objet de cet exercice est de démontrer que E est euclidien, c'est-à-dire que la norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire $\phi(x, y)$.
1). Montrer que le seul candidat possible pour ϕ est :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2].$$

2). Montrer que $\phi(u+v, z)+\phi(u-v, z) = 2\phi(u, z) = \phi(2u, z)$. En déduire que $\phi(x+y, z) = \phi(x, z) + \phi(y, z),\ \forall x, y, z \in E$.
3). Montrer que $\phi(\lambda x, z) = \lambda\phi(x, z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$. En déduire que ϕ est bien une forme bilinéaire telle que $\phi(x, x) = \|x\|^2$.

Exercice 12. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n, et soit

$$p(E) = \sup\left\{ \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)},\ x, y \in E,\ (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

1). Calculer $p(\mathbb{R}^2)$ quand $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(a, b)\|_\infty = \sup(|a|, |b|)$.
2). Prouver que $1 \leq p(E) \leq 2$, puis (à l'aide de l'exercice 11) que $(E, \|\cdot\|)$ est euclidien ssi $p(E) = 1$.

Exercice 13. : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. On admet que $\mathcal{H}$ possède une base hilbertienne.
1). Soit F une sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, montrer qu'il admet une base hilbertienne.
2). Soit $\mathcal{H} = F \overset{\perp}{\oplus} G$ une décomposition de $\mathcal{H}$ en somme directe, topologique et orthogonale (i.e. la somme est directe, F et G sont fermés et orthogonaux, $F+G$ est dense dans $\mathcal{H}$). Vérifier que la réunion d'une base hilbertienne de F et d'une base hilbertienne de G forme une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
3). Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$. Montrer que l'image par U d'une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

Exercice 14. : Soit H un espace de Hilbert, et soit F un sous-espace de H. Montrer que, pour toute forme linéaire continue f sur F, il existe $\tilde{f} \in H'$ telle que $\tilde{f}_{|F} = f$ (avec conservation de la norme). On donnera une preuve directe n'utilisant pas le théorème de Hahn-Banach.

Exercice 15. : Soit $(f_n)_n$ un système de vecteurs dans un espace de Hilbert H. On suppose qu'il existe une constante $A > 0$ telle que l'on ait, pour tout $x \in H$,

$$\|x\|^2 \leq A \sum_{n\geq 0} |\langle x, f_n\rangle|^2.$$

Prouver que ce système est total (l'ensemble des combinaisons linéaires finies des f_n est dense dans H).

Exercice 16. : On définit sur $[0,1]$, $\psi_1(t) = 1$, puis pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 1, 2, \ldots, 2^j$:

$\psi_{2^j+k}(t) = \alpha_{j,k}$ si $t \in [(2k-2)2^{-(j+1)}, (2k-1)2^{-(j+1)}]$

$\psi_{2^j+k}(t) = -\alpha_{j,k}$ si $t \in](2k-1)2^{-(j+1)}, (2k)2^{-(j+1)}]$

$\psi_{2^j+k}(t) = 0$ sinon,

où les constantes $\alpha_{j,k}$ sont choisies de telle sorte que les fonctions précédentes soient de norme 1 dans $\mathrm{L}^2([0,1])$. Calculer $\alpha_{j,k}$, et prouver que la famille $\{\psi_n, n \geq 1\}$ (appelé système de Haar) forme une base orthonormée de $\mathrm{L}^2([0,1])$.

Problme 1. : Méthode d'extraction diagonale de Cantor.
1) Soit H un espace de Hilbert séparable (ie. il existe une famille dénombrable $D = \{d_k,\ k \geq 0\}$ dense dans H). On considère une famille $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de H tels que $\|x_n\| \leq C,\ \forall n \geq 0$, où C est une constante indépendante de n.
a) Démontrer que l'on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{\phi_0(n)})_n$ telle que la suite de produits scalaires $(\langle d_0, x_{\phi_0(n)}\rangle)_n$ soit convergente. De même prouver qu'on peut extraire de la suite $(x_{\phi_0(n)})_n$ une sous-suite $(x_{\phi_1(n)})_n$ telle que la suite $(\langle d_1, x_{\phi_1(n)}\rangle)_n$ soit convergente. Que dire de la suite $(\langle d_0, x_{\phi_1(n)}\rangle)_n$?
b) En itérant ce procédé d'extraction, démontrer que, pour tout entier $k \geq 0$, il existe une sous-suite $(x_{\phi_k(n)})_n$ telle que les suites $(\langle d_j, x_{\phi_k(n)}\rangle)_n$ soient convergentes pour $j = 0, 1, \ldots, k$.
c) (procédé diagonal de Cantor). Démontrer que, pour tout $d \in D$, $(\langle d, x_{\phi_n(n)}\rangle)_n$ converge.
d) En déduire que, pour tout $y \in H$, $(\langle y, x_{\phi_n(n)}\rangle)_n$ converge.

2) Soit E un espace séparable. En calquant la méthode de la question 1), démontrer que toute famille bornée $(\mu_n)_n$ de formes linéaires continues sur E contient une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ convergeant faiblement, c'est-à-dire : il existe une forme linéaire continue μ sur E tel que $(\mu_{n_k}(x))_k$ converge vers $\mu(x)$ pour tout $x \in E$.
Le dual topologique d'un espace de Hilbert H (ie. l'espace des formes linéaires continues sur H) s'identifie à l'espace H lui-même (comme en dimension finie, voir T.D. 2). En ce sens, le résultat 1)d) est bien un cas particulier du 2).

Problme 2. : Opérateur à noyau.
Soit $(x,y) \mapsto K(x,y)$ une fonction continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et soit T l'opérateur associé sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)dy, \; x \in [0,1], \; f \in \mathcal{C}.$$

1) Vérifier que T est un endomorphisme continu sur $\mathcal{C}$ (muni de la norme de la convergence uniforme). Montrer que

$$\|T\| \; = \; \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)| \, dy \, .$$

Indication : si le sup est atteint en x_0, utiliser la suite $f_n(y) = |K(x_0,y)|/(|K(x_0,y)|+1/n)$.
2) Soit λ une valeur propre non nulle de T et F un s.e.v quelconque de $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$. On suppose que $\dim F = n$, et on note $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une base orthonormée de F pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(y)g(y)dy$. En considérant des quantités de la forme

$$\int_0^1 |K(x,y) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(y)|^2 \, dy \, ,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires, démontrer que

$$|\lambda^2| \sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2 \leq \int_0^1 K^2(x,y) \, dy \, .$$

3) En déduire que, si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(T - \lambda)$ est de dimension finie. La méthode précédente est-elle valable pour $\lambda = 0$?
4) Montrer que l'image par T de la boule unité de $\mathcal{C}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}$ (on pourra appliquer le th. d'Ascoli).

Travaux dirigés 2. Exercices ANAF, 2001/2002.

DUALITE ALGEBRIQUE ET TOPOLOGIQUE. RELATIONS D'ORTHOGONALITE. TRANSPOSEE.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires sur E. L'espace E^* est appelé l'espace dual algébrique de E.

I. Dualité en dimension finie.

Exercice 17. : Soient E un e.v de dimension finie, et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
1) Rappeler la définition de la base duale de $\mathcal{B}$ dans l'espace dual E^*. En particulier quelle est la dimension de E^* ?
2) Soit $x \in E$ quelconque. Prouver que l'application $J(x) : f \mapsto f(x)$ définit une forme linéaire sur E^*, c'est-à-dire un élément de $E^{**} = (E^*)^*$.
3) Démontrer que $J(E) = E^{**}$.
Ainsi à toute forme linéaire μ sur E^*, on peut associer de manière unique un vecteur x de E tel que $\mu = J(x)$.

Exercice 18. : Soit E un e.v de dimension finie. Si $A \subset E$, on définit

$$A^\perp = \{f : f \in E^*, f(x) = 0, \forall x \in A\} .$$

1) Vérifier que, si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$, que $A^\perp = [vect(A)]^\perp$, puis que $A^\perp$ est un s.e.v de E^*, et enfin que $E^\perp = \{0\}$.
2) Si $B \subset E^*$, on définit

$$^\perp B = \{x : x \in E, f(x) = 0, \forall f \in B\}.$$

Vérifier les propriétés duales des précédentes.
3) Soit F un s.e.v de E, et soit G un s.e.v de E^*. Vérifier que :
$F \subset {}^\perp(F^\perp)$, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, $F = {}^\perp(F^\perp)$ et $G = ({}^\perp G)^\perp$.

Exercice 19. : Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien (ou hermitien) de dimension finie. Prouver que, pour toute forme linéaire μ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que l'on ait $\mu(x) = \langle x, a\rangle$ pour tout $x \in E$.
Ce résultat subsiste dans un espace de Hilbert à condition de considérer les formes linéaires continues (cf. cours ou "espaces de suites" plus loin).

Exercice 20. : (transposition). Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, et E^*, F^*, G^* leurs duaux algébriques. Soit $u \in L(E, F)$. On rappelle que l'application transposée de u, notée u^*, est définie de F^* dans E^* par : $u^*(f) = f \circ u$.
1) Montrer que u^* est une application linéaire de F^* dans E^*, puis que $\mathrm{Ker} u^* = (\mathrm{Im} u)^\perp$, et enfin $(u + v)^* = u^* + v^*$ pour $v \in L(E, F)$.
2) Soit $v \in L(F, G)$. Vérifier que $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
3) Démontrer que, si $E = F$ est de dimension finie, alors u et u^* ont le même rang.

La dualité joue un rôle essentiel en algèbre linéaire. Elle permet notamment d'identifier deux vecteurs d'un e.v donné :

Exercice 21. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, et soient x, y deux vecteurs de E. Prouver que

$$(*)\ \ x = y \quad \Leftrightarrow f(x) = f(y),\ \forall f \in E^*.$$

Remarque. *Ainsi, en dimension finie, il est possible de ramener l'étude d'une équation vectorielle dans E à un certain nombre d'équations scalaires. Plus précisément, on peut se ramener à un nombre fini d'équations scalaires : pourquoi ? et expliciter ce nombre.*
Si E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension quelconque, on définit de la même faon les relations d'orthogonalité et la transposition : vérifier que les propriétés 1) et 2) de l'exercice 18, ainsi que les 1) et 2) de l'exercice 20, subsistent en dimension infinie.
De même l'équivalence $(*)$ dans l'exercice 21 est encore vraie en dimension infinie. Pour prouver ce point, on pourra utiliser une base de Hamel de E (voir plus haut) en définissant à partir de celle-ci des formes linéaires particulières.
Malheureusement le dual algébrique d'un espace vectoriel de dimension infinie est souvent un "très gros espace" si bien que l'équivalence $(*)$ n'est pas très utile en dimension infinie.
Quand $\dim E = +\infty$, *et quand E est un espace vectoriel* **normé**, *on préfère utiliser la notion de dual topologique.*

II. Dual topologique. Relations d'orthogonalité. Applications transposées.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On désignera par $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E. Le $\mathbb{K}$-e.v. E' est appelé le dual topologique de E.

Exercice 22. : Vérifier que

$$e' \mapsto \|e'\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |e'(x)|$$

définit une norme sur E'. Pourquoi l'espace E', muni de cette norme, est-il complet (même si E ne l'est pas) ?

Remarque. *Par conséquent E' est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach. Il faut noter que le dual E' dépend de l'ensemble E (évidemment !), mais également de la norme choisie sur E : une forme linéaire sur E peut être continue vis-à-vis d'une norme donnée, et non continue pour une autre norme :*

Exercice 23. : Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$, et soit $e' : f \mapsto f(0)$. Prouver que e' est une forme linéaire sur E (ie. $e' \in E^*$), que e' est continue vis-à-vis de la norme de la convergence uniforme, et non continue pour la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

Remarque. *En dimension finie le dual topologique (pour n'importe quelle norme) concide toujours avec le dual algébrique (cf. exercice 5, T.D. 1). En revanche, si $(E, \|\cdot\|)$ est un* *e.v.n de dimension infinie, son dual topologique E' est toujours strictement contenu dans E^* (voir exercice 7, T.D. 1). Cependant, bien que E' soit un espace beaucoup plus "petit" que E^*, la propriété $(*)$ ci-dessus subsiste quand on remplace E^* par E' (c'est un corollaire du théorème de Hahn-Banach) :*

$$x = y \quad \Leftrightarrow e'(x) = e'(y), \ \forall e' \in E'.$$

Dans toute la suite, les relations d'orthogonalité seront toujours considérées au sens de E', et non au sens de E^*. En dimension finie, ces deux notions d'orthogonalité concident, mais ce n'est plus vrai en dimension infinie.

Exercice 24. : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v muni d'un produit scalaire, et soit F un s.e.v de E. Pour $A \subset E$, on définit

$$A^\perp = \{x : x \in E, \langle x, a\rangle = 0, \ \forall a \in A\}.$$

1). Montrer que $F^\perp$ est fermé.
2). Démontrer que, si $E = F \oplus F^\perp$, alors F est fermé. [Que dire de $F^\perp + (F^\perp)^\perp$?].
3). Soit E' le dual topologique de E, et soit $e' \in E'$. Montrer que, ou bien $(\mathrm{Ker} e')^\perp = \{0\}$, ou bien $\dim(\mathrm{Ker} e')^\perp = 1$, et que dans ce dernier cas on a $E = \mathrm{Ker} e' \oplus (\mathrm{Ker} e')^\perp$.
4). Soient $f, g \in E'$ telles que $(\mathrm{Ker} f) = (\mathrm{Ker} g)$ et $\dim(\mathrm{Ker} f)^\perp = 1$: prouver que les formes f et g sont proportionnelles.
5). L'objet de cette question est de prouver que la réciproque dans le 2) n'est pas nécessairement vérifiée si E n'est pas complet.
Supposons E non complet (donner un exemple), et considérons l'injection canonique T de E dans E' ($T(x)$ est définie par $T(x)(y) = \langle x, y\rangle, \ y \in E$).
Vérifier alors que T est une isométrie de E dans E', puis qu'il existe $e' \in E'$ telle que $e' \notin \mathrm{Im}(T)$, et enfin que $(\mathrm{Ker} e')^\perp = \{0\}$. Conclure.
Remarque. La réciproque dans le 2) est vraie si E est complet (i.e. E est un espace d'Hilbert) : si F est un s.e.v fermé dans E, alors $E = F \oplus F^\perp$, voir le cours.

Exercice 25. : Soit E un e.v.n, et soit E' son dual topologique. Si M est un sous-ensemble de E, on définit

$$M^\perp = \{e' : e' \in E', e'(x) = 0, \forall x \in M\}.$$

1). Vérifier que, si $M_1 \subset M_2$, alors $M_2^\perp \subset M_1^\perp$, puis que $M^\perp = [vect(M)]^\perp$ et $M^\perp$ est un s.e.v fermé de E', et enfin que $E^\perp = \{0\}$.
2). Si $N \subset E'$, on définit

$$^\perp N = \{x : x \in E, e'(x) = 0, \forall e' \in N\}.$$

Vérifier les propriétés duales du 1).
3). Soit M un s.e.v de E. Démontrer l'inclusion $\overline{M} \subset {}^\perp(M^\perp)$.
En fait, on a l'égalité $\overline{M} = {}^\perp(M^\perp)$, mais la preuve de l'inclusion inverse nécessite l'utilisation du théorème de Hahn-Banach (cf. cours et T.D. 3).
4). Prouver que $\overline{N} \subset ({}^\perp N)^\perp$ pour tout s.e.v N de E'.
L'inclusion inverse peut être fausse, cependant on a égalité si E est réflexif (cf. cours).

Exercice 26. : Démontrer que l'application $J(x) : e' \mapsto e'(x)$ définit une forme linéaire continue sur E', c'est-à-dire un élément de $E'' = (E')'$.

Remarque. *Si* $\dim E < +\infty$, *l'application* J *ci-dessus concide avec celle de l'exercice 17 2) du fait que* $E' = E^*$ *; d'où* $J(E) = E''$. *En dimension infinie, on n'a pas toujours* $J(E) = E''$. *Quand cette égalité a lieu, on dit que* E *est réflexif (cf. cours). Enfin, on verra dans le T.D. 3 que* J *est une isométrie de* E *dans* E''.

Exercice 27. : On suppose que E et F sont des e.v.n et que u est une application linéaire continue de E dans F. On note E' et F' le dual topologique respectivement de E et F, et on définit *l'application transposée* de u :

$$u^*(e') = e' \circ u \quad (e' \in F').$$

Vérifier que u^* est une application linéaire continue de F' dans E', et généraliser les propriétés des questions 1) et 2) de l'exercice 20.

Remarque. *On verra dans le T.D. 3 que* $\|u\| = \|u^*\|$ *(on obtient facilement l'une des inégalités). Autrement dit, les plus petites constantes* C *et* C', *telles que*

$$\|ux\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E, \quad \textit{et} \quad \|u^*e'\|_{E'} \leq C'\|e'\|_{F'}, \quad \forall e' \in F',$$

sont égales. De même, on démontrera que $\mathrm{Ker}u =^{\perp}(\mathrm{Im}u^*)$.

III. Exercices d'application des propriétés et définitions précédentes.

Exercice 28. : Soit E un espace vectoriel normé. Soit $y \in E \setminus \{0\}$ et $e' \in E' \setminus \{0\}$. On considère l'application T définie par $Tx = e'(x)y$, pour $x \in E$.
1) Vérifier que T est linéaire continue. Quelle est sa norme ?
2) Déterminer l'image de T, notée $\mathrm{Im}T$. A-t-on toujours $E = \mathrm{Ker}T \oplus \mathrm{Im}T$?
3) Déterminer T', le transposé de T. Calculer sa norme.

Exercice 29. : Soit $E = C^0([0;1];\mathbb{C})$, l'espace de Banach des fonctions continues bornées de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\forall f \in E\,, \quad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|\,.$$

Soit $F = C^1([0;1];\mathbb{C})$ le sous-espace dense dans E des fonctions de classe C^1 sur $[0;1]$. Soit $\mathcal{D}$ l'application de F dans E qui, à toute fonction f de F, associe sa dérivée f'. Vérifier que $\mathcal{D}$ est linéaire. Est-elle continue ?

Exercice 30. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, et soient $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ des formes linéaires sur E telles que $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\phi_i \subset \mathrm{Ker}\phi$.
1) On suppose que E est de dimension finie. En écrivant chacun des deux ensembles de l'hypothèse ci-dessus comme l'orthogonal au sens de la dualité de sous-ensembles de E', démontrer que ϕ est combinaison linéaire des ϕ_i. Cette preuve est-t-elle encore valable en dimension infinie ?
2) [1] Généraliser le résultat du 1) en dimension infinie.
Indications pour 2) : considérer l'application $T : x \mapsto [\phi(x), \phi_1(x), \ldots \phi_n(x)]$, définie de E dans $\mathbb{K}^{n+1}$, puis démontrer qu'il existe sur $\mathbb{K}^{n+1}$ une forme linéaire non nulle, identiquement nulle sur $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 31. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension quelconque et $\phi_1, \ldots, \phi_n$ des formes linéaires indépendantes sur E. Prouver que l'application T, de E dans $\mathbb{K}^n$, définie par $T(x) = [\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)]$ est surjective.

Exercice 32. : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$, deux à deux distincts. On considère sur E les formes linéaires suivantes : $\phi_a(P) = P(a)$, $\phi_b(P) = P(b)$, $\phi_c(P) = P(c)$, et enfin $\psi(P) = \int_a^b P(t)dt$.
Etudier l'indépendance linéaire de ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c, puis de $\phi_a, \phi_b, \phi_c, \psi$ (en déterminant éventuellement les relations de dépendance).
On obtient que ce système est libre ; le second l'est "ssi" $c \neq \frac{a+b}{2}$. Si $c = \frac{a+b}{2}$, on trouve la relation, dite des trois niveaux : $\psi = \frac{b-a}{6}(\phi_a + \phi_b + 4\phi_c)$.

Exercice 33. : Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1]]$ muni de la norme uniforme. Prouver que les applications suivantes sont des formes linéaires continues sur E. Calculer leur norme, et vérifier, dans chaque cas, si celle-ci est atteinte ou non.

i) $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$; ii) $f \mapsto \int_{-1}^1 sg(x)f(x)dx$; iii) $f \mapsto \int_{-1}^1 f(x)dx - f(0)$;

iv) $f \mapsto \frac{f(a)+f(-a)-2f(0)}{a^2}$, où $a \in]0, 1[$; v) $f \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} f(\frac{1}{n})$;

(vi) $f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$.

Exercice 34. : On note c_0 l'espace des suites de nombres réels convergeant vers 0, muni de la norme usuelle : $\|(u_n)_n\|_\infty = \sup_n |u_n|$. Soit

$$e'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-(n+1)} u_n,$$

où $u = (u_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Même question que dans l'exercice précédent.

Exercice 35. : Soit E un e.v.n, soit $e' \in E'$, $e' \neq 0$, et soit $H = \{x : x \in E, e'(x) = 1\}$. Démontrer que $\|e'\|_{E'} = [d(0, H)]^{-1}$, où $d(0, H)$ désigne la distance de 0 à H.

Rappel. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On rappelle que, pour toute forme linéaire continue e' sur l'espace de Lebesgue usuel $\mathrm{L}^p([0, 1])$, il existe un unique élément $\phi \in \mathrm{L}^q([0, 1])$ tel que*

$$e'(f) = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx, \ \forall f \in \mathrm{L}^p([0, 1]),$$

avec en outre $\|e'\| = \|\phi\|_q$, où q est le nombre conjugué de p (ie. $1/p + 1/q = 1$).
Ce résultat s'étend en fait à $\mathrm{L}^p(E)$, pour tout espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$ de mesure σ-finie [6]. Voir également "espaces de suites".

Exercice 36. : Soit K une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, et soit

$$(Tf)(x) = \int_0^1 f(y)K(x, y)dy.$$

Montrer que T définit un opérateur linéaire continu sur $\mathrm{L}^p([0, 1])$ pour chaque réel $p \geq 1$. Décrire l'opérateur transposé de T (en l'identifiant à un opérateur sur $\mathrm{L}^q([0, 1])$).

Problme 3. : Prolongement d'une forme linéaire en dimension finie.
1). Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie.
a). Soient F un s.e.v de E, f une forme linéaire sur F de norme 1 pour la norme des formes linéaires associée à la norme induite sur F. Soit enfin a un vecteur de E n'appartenant pas à F. On note $G = F \oplus \mathbb{R}a$.
Démontrer qu'il existe une forme linéaire g sur G de norme 1 telle que sa restriction à F soit égale à f.
b). En déduire qu'il existe une forme linéaire sur E de norme 1 prolongeant f.
2). Soit maintenant E un $\mathbb{C}$-e.v.n de dimension finie.
a). Soient $f \in E'$. Démontrer qu'il existe une unique forme $\mathbb{R}$-linéaire u sur E telle que $f(x) = u(x) - iu(ix), \ \forall x \in E$. Vérifier que $\|f\| = \|u\|$.
b). Généraliser la question 1)b) au cas complexe.
3). Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K-e.v.n. de dimension finie, et soit ϕ^* l'application transposée de ϕ. Prouver que $\|\phi\| = \|\phi^*\|$.
Indications.
1a) Soit $\alpha = g(a)$. Montrer que g convient si, et seulement si, le réel α est tel que $f(x)-\|x-a\| \leq \alpha \leq f(x)+\|x-a\|, \ \forall x \in F$. Conclure en remarquant que $f(x)-\|x-a\| \leq f(y) + \|y-a\|, \ \forall x, y \in F$.
3) Commencer par prouver que $\|\phi^*\| \leq \|\phi\|$. Pour l'inégalité inverse, remarquer que pour un $x \in E$ donné tel que $\phi(x) \neq 0$, il existe une forme linéaire f sur E de norme 1 telle que $f(\phi(x)) = \|\phi(x)\|$.

Problme 4. : Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et soit E l'espace engendré par les fonctions $x \mapsto f(x+a)$ où a parcourt $\mathbb{R}$. On suppose que E est de dimension finie. L'objet de ce problème est d'écrire f comme combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $x \mapsto P(x)e^{zx}, \ z \in \mathbb{C}, \ P \in \mathbb{C}[X]$. On note $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une base quelconque de E.
1). Montrer que le dual E' de E admet une base de la forme $(e'_{x_1}, \ldots, e'_{x_n})$, où les x_i sont des réels, et où l'on a noté e'_a, pour $a \in \mathbb{R}$, la forme linéaire sur E définie par $e'_a(g) = g(a)$. En déduire que la matrice $[\phi_i(x_j)]_{i,j=1,\ldots,n}$ est inversible.
2). A l'aide des fonctions $g_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que la fonction dérivée f' de f appartient à E.
3). En déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants, et conclure.

Complément : Espaces de suites

Pour $p \in [1, +\infty[$, on note ℓ^p l'espace des suites $u = (u_k)_{k\geq 0}$ de nombres réels tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p < +\infty,$$

et on note ℓ^∞ l'espace des suites bornées. On rappelle que

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{k\geq 0} |u_k|$$

définissent une norme respectivement sur ℓ^p et ℓ^∞. On vérifie facilement que la famille $(\ell^p)_{p\in[1;\infty]}$ est croissante pour l'inclusion.
On rappelle l'inégalité classique de Hlder. Pour $p \in [1, \infty]$, on note q son nombre conjugué défini par $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention habituelle $1/\infty = 0$). Si $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$, alors la suite $(u_k v_k)_{k\geq 0}$ est dans ℓ^1, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

On désignera par $c = c(\mathbb{N})$ l'e.v des suites convergentes et par $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ le s.e.v de c composé des suites convergeant vers 0. Ces deux espaces sont contenus dans ℓ^∞ et sont munis de la norme induite par $\|\cdot\|_\infty$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on appelle $e^{(n)}$ la suite définie par,

$$e_k^{(n)} = 1 \text{ si } k = n \text{ et } e_k^{(n)} = 0 \text{ si } k \neq n\,.$$

Exercice 37. : Montrer que tous les e.v.n définis ci-dessus sont complets.

Remarque. *La norme $\|\cdot\|_2$ sur ℓ^2 provient clairement du produit scalaire :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k, \quad x, y \in \ell^2.$$

Par conséquent ℓ^2 est un espace de Hilbert.

Exercice 38. : Une famille $\{f_n, n \geq 0\}$ de vecteurs d'un e.v.n $(E, \|\cdot\|)$ forme une **base de Schauder** si, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(a_n)_n$ de scalaires tels que

$$\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n\| = 0.$$

Démontrer que la famille $\{e^{(n)}, n \geq 0\}$ forme une base de Schauder dans ℓ^p, pour $p \in [1, +\infty[$, et dans c_0.
Ce résultat subsiste-t-il dans ℓ^∞ ? Que dire de plus sur ce système quand $p = 2$?

Exercice 39. : Séparabilité.
1). Soit $p \in [1, +\infty[$. Déduire de l'exercice 38 que les espaces ℓ^p et c_0 sont séparables (un e.v.n est séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense). En fait un e.v.n qui admet une base de Schauder est séparable (pourquoi ?).
2). Prouver que ℓ^∞ n'est pas séparable. En déduire qu'il n'admet pas de base de Schauder.
Indication : pour prouver la non-séparabilité de ℓ^∞, on pourra considérer le sous-ensemble A de ℓ^∞ formé des suites de la forme $(u_k)_k$ avec $u_k = 0$ ou 1 : montrer que A n'est pas dénombrable ; quelle est la distance de deux suites distinctes quelconques de A ?

Exercice 40. : Dual topologique de ℓ^2.
1). Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Prouver que, pour tout $x \in \ell^2$, la somme $(Ru)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_n$ existe et que $Ru \in (\ell^2)'$ (le dual topologique de ℓ^2). Comparer $\|R(u)\|_{(\ell^2)'}$ et $\|u\|_2$.
2). Soit $e' \in (\ell^2)'$. On note $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de scalaires définis par $u_n = e'(e^{(n)})$, et on pose $v^{(N)} = (u_0, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots)$, $N \in \mathbb{N}$. Exprimer $e'(v^{(N)})$ en fonction des nombres u_n, et prouver qu'il existe un réel $M \geq 0$ indépendant de N tel que

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leq M(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire que $(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Que dire de Ru ?
3). Que dire de l'application $R : u \mapsto Ru$?

Exercice 41. : Dual topologique d'un espace de Hilbert.
Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert admettant une base orthonormée (par exemple $\mathrm{L}^2(T)$ avec la base de Fourier ; plus généralement tout espace de Hilbert séparable). En adaptant la méthode de l'exercice 40, prouver que le dual topologique H' de H est isométrique à l'espace H lui-même. Plus précisément :
Soit $e' \in H'$. Il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que l'on ait $\|a\| = \|e'\|_{E'}$ et

$$e'(x) = \langle a, x\rangle, \quad \forall x \in H.$$

En fait le résultat précédent subsiste dans un espace de Hilbert non séparable.

Exercice 42. : Dual topologique de ℓ^p.
1). Démontrer que, pour $p \in [1, +\infty[$ quelconque, il existe une isométrie bijective entre le dual topologique $(\ell^p)'$ de ℓ^p et l'espace ℓ^q, où p et q sont conjugués (on pourra utiliser une méthode analogue à celle de l'exercice 40).
2). De même, prouver qu'il existe une isométrie bijective entre $(c_0)'$ et ℓ^1.
3). Montrer que ℓ^p est réflexif, pour tout $p \in]1, +\infty[$.
4). Prouver que l'espace c_0 n'est pas réflexif. On admettra que, si E et F sont des e.v.n isomorphes, alors E' et F' le sont également.
Indication : en utilisant la transposition, déduire de 1) et 2) que c_0'' et ℓ^∞ sont isomorphes, puis prouver grce à l'exercice 39 2) que c_0 et ℓ^∞ ne sont pas isomorphes.

Exercice 43. : Démontrer qu'il existe une isométrie de ℓ^1 dans $(\ell^\infty)'$.
On verra dans le T.D. 3 que cette isométrie n'est pas surjective. Par conséquent ℓ^1 est strictement "contenu" dans $(\ell^\infty)'$.

Exercice 44. : Démontrer que l'application $T : (x_n)_n \mapsto (y_n)_n$ définie par $y_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - y_0$ pour $n \geq 1$, définit un isomorphisme de $c(\mathbb{N})$ dans $c_0(\mathbb{N})$. Soient $a^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, et $a^{(n)} = e^{(n-1)}$ pour $n \geq 1$. Prouver que le système $\{a^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de Schauder de c.

Exercice 45. : Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.
1). Prouver qu'il n'existe pas d'injection isométrique de $\mathcal{C}$ dans ℓ^p pour $p \in [1, +\infty[$.
Indication : on pourra montrer que deux éléments quelconques u et v de ℓ^p admettent un unique milieu w (ie. $2\|u - w\|_1 = 2\|v - w\|_1 = \|u - v\|_1$), et que ce n'est pas le cas pour deux fonctions dans $\mathcal{C}$.
2). Construire une injection isométrique de $\mathcal{C}$ dans ℓ^∞.

Travaux dirigés 3. Exercices ANAF, 2001/2002.

Convexité. Théorème de Hahn-Banach. Théorème de Baire. Compacité.

I. Convexité

Exercice 46. : On désigne par E un e.v.
1). Soit C un ensemble convexe dans E. Prouver que, si $x_1, \ldots, x_p \in C$ et si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ ($\alpha_i \in [0,1]$), alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in C$.
2). Soit $C_1, \ldots, C_n$ des ensembles convexes de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels donnés. Prouver que l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$ est aussi convexe.
3). Soit A un sous-ensemble quelconque de E et $C(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A. Prouver que $C(A)$ est un ensemble convexe, appelé **l'enveloppe convexe** de A, et que

$$C(A) = \Big\{x \in E;\, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ n \in \mathbb{N}^*, x_i \in A, \alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\Big\}.$$

Exercice 47. : Soit E un e.v.n, et soit C un ensemble convexe dans E.
1). Démontrer que l'intérieur de C, noté $Int(C)$, et son adhérence, notée $\overline{C}$, sont des ensembles convexes.
2). On suppose que $0 \in Int(C)$. Démontrer que $Int(C) = Int(\overline{C})$.
Indications : l'une des inclusions est évidente (laquelle ?). Soit p la jauge de $Int(C)$ et soit $F = \{x : x \in E, p(x) \leq 1\}$. Pour prouver l'inclusion inverse, démontrer que : F est fermé, $C \subset F$, $\overline{C} = F$, les éléments de F tels que $p(x) = 1$ ne sont pas dans $Int(F)$.
3). De même démontrer que, si C est d'intérieur non vide, alors $\overline{Int(C)} = \overline{C}$.

Exercice 48. : Donner une C.N.S. pour qu'une partie B de $\mathbb{R}^n$ soit la boule unité fermée vis-à-vis d'une norme dans $\mathbb{R}^n$ [3] (p. 236).

II. Théorème de Hahn-Banach.

Dans les différentes formes géométriques du théorème de Hahn-Banach, les ensembles convexes sont supposés, ou bien ouverts, ou bien fermés, ou encore compacts, mais ils ne sont jamais quelconques. Selon ces hypothèses, on obtient une séparation large ou stricte. L'exercice 49 montre qu'il est possible, en dimension finie, de s'affranchir de ces hypothèses (de nature topologique). L'exercice 50 prouve que ces hypothèses sont au contraire essentielles en dimension infinie.

Exercice 49. : Théorème de séparation en dimension finie, [2].
1). Soit C un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $0 \notin C$. Démontrer qu'il existe une forme linéaire ϕ non nulle sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\phi(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

2). Même question en supposant cette fois que $0 \in Fr(C)$.
3). Soient A et B deux ensembles convexes disjoints non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\inf_{x \in B} \phi(x) \geq \sup_{x \in A} \phi(x).$$

4). On suppose que $\overline{C} = \mathbb{R}^n$. Montrer que $C = \mathbb{R}^n$.
5). En déduire que tout convexe de $\mathbb{R}^n$, sauf $\mathbb{R}^n$, est d'un coté d'un hyperplan affine.

Exercice 50. : Exemple en dimension infinie de deux ensembles convexes disjoints non séparés au sens large.
Dans l'espace $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}^*)$, on considère les ensembles

$$A_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1 : \quad x_{2n} = 0, \quad \forall n \geq 1\},$$

$$B = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1 : \quad x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1}, \quad \forall n \geq 1\}.$$

1). Montrer que A_0 et B sont des s.e.v fermés dans ℓ^1 et que $A_0 + B$ est dense dans ℓ^1.
2). Soit $c \in \ell^1$ tel que $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Montrer que $c \notin A_0 + B$ et que, pour $A := A_0 - c$, $A \cap B$ est vide. Démontrer que A et B ne peuvent être séparés au sens large.

Le théorème de Hahn-Banach admet de nombreuses et diverses applications en analyse. Nous proposons ci-dessous une liste (qui est loin d'être exhaustive !) de quelques techniques classiques fondées sur le théorème de Hahn-Banach.

(A) *Le théorème de Hahn-Banach est tout d'abord un théorème d'existence ; il permet par exemple de montrer qu'un "sup" est atteint : pour tout vecteur x d'un e.v.n E,*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|, \; f \in E', \|f\| \leq 1\} = \max\{|f(x)|, \; f \in E', \|f\| \leq 1\}.$$

Exercice 51. : Soit E un e.v.n. Redémontrer le résultat précédent.
Prouver que, si $x, y \in E$ sont tels que $e'(x) = e'(y)$ pour tout $e' \in E'$, alors $x = y$.

Exercice 52. : Prouver que l'injection canonique J de E dans E" (cf. exercice 26, T.D. 2) est une isométrie de E sur $J(E)$.

Exercice 53. : Soient E, F des e.v.n, et soit T une application linéaire continue de E dans F. On note T^* l'application transposée de T.
1). Prouver que $\mathrm{Ker}T = ^{\perp}(\mathrm{Im}T^*)$.
2). Démontrer que $\|T\| = \|T^*\|$.

(B) *Le théorème de Hahn-Banach, sous sa forme géométrique, est souvent très utile pour démontrer une inclusion $A \subset B$, où A est un sous-ensemble quelconque d'un e.v.n E, et où B est un ensemble convexe fermé de E. On tente alors (a ne "marche" pas à tous les coups !) de raisonner de la manière suivante : soit $x \notin B$; alors $\{x\}$ et B peuvent être séparés strictement (pourquoi ?) ...etc... (le but du jeu étant de montrer que $x \notin A$).*

Exercice 54. : (Voir exercice 25, T.D. 2). Soit M un s.e.v d'un e.v.n E. Prouver que $^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$.

Exercice 55. : Soit E un e.v.n sur $\mathbb{R}$ et C un convexe contenant 0. On définit les deux ensembles suivants :

$$P_C = \{e' : e' \in E', e'(x) \leq 1, \forall x \in C\}$$
$$Q_C = \{x : x \in E, e'(x) \leq 1, \forall e' \in P_C\}.$$

1). Déterminer P_C lorsque C est un s.e.v de E.
2). Montrer que, dans le cas général, on a $Q_C = \overline{C}$.

(C) *Le théorème de Hahn-Banach est également un outil très efficace pour prouver qu'un* **sous-espace vectoriel** *F d'un e.v.n E est dense dans E (voir cours) : pour cela, on tente de prouver que $F^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire que*

$$(*) \ : \ e' \in E', \ e'(x) = 0, \ \forall x \in F \ \Rightarrow \ e' = 0.$$

En dimension finie, si F satisfait à une telle condition, on a $F = ^\perp(F^\perp) = E$. En dimension infinie l'égalité $F = ^\perp(F^\perp)$ n'est pas toujours vérifiée, mais on a $\overline{F} = ^\perp(F^\perp)$ (voir exercice 54), ce qui prouve que, $F^\perp = \{0\}$ si,et seulement si, F est dense dans E.

Exercice 56. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n. de dimension infinie.
1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des vecteurs de E linéairement indépendants. Montrer qu'il existe n formes linéaires $a'_1, \cdots, a'_n$, continues sur E, telles que $a'_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) pour tous i, j.
2). En déduire que E', le dual topologique de E, est de dimension infinie.

Remarque : *En dimension infinie, il n'était pas clair jusqu'à présent que $E' \neq \{0\}$, puisqu'on a vu que E' est strictement inclu dans E^*, le dual algébrique. L'exercice 56 règle la question.*

Exercice 57. : Soit $p \in [1, +\infty[$, et soit a un nombre complexe tel que $0 < |a| < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n = (a^{kn})_{k \geq 1}$. Prouver que $f_n \in \ell^p$ et que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des f_n est dense dans ℓ^p.

Exercice 58. : Démontrer que l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}_+$ et de la forme $x \mapsto p(x) \cdot e^{-x}$, où $p \in \mathbb{C}[X]$, est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$.
Indication. Considérer $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$ orthogonale à toutes les fonctions $x^k \cdot e^{-x}, \ k \in \mathbb{N}$, et utiliser la fonction (d'une variable complexe) : $G(z) = \int_{\mathbb{R}+} f(x) e^{-x} e^{zx} dx$.

Exercice 59. : Pourquoi existe-t-il une forme linéaire continue non nulle sur ℓ^∞, nulle sur c_0 ? En déduire les propriétés suivantes :
1). Le plongement canonique de ℓ^1 dans $(\ell^\infty)'$ (cf. T.D. 2) est non surjectif. Autrement dit, l'espace ℓ^1 est strictement contenu dans le dual topologique de ℓ^∞.
2). ℓ^1 n'est pas réflexif.

Exercice 60. : Soit ℓ^∞ l'e.v.n. des suites bornées de réels, muni de la norme sup $\| \cdot \|_\infty$. Soit τ l'opérateur translation défini sur ℓ^∞ par, pour $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (\tau x)(n) := x(n+1).$$

1). Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle Λ sur ℓ^∞ (appelée limite de Banach) telle que, pour tout $x \in \ell^\infty$,

$$\Lambda \tau x = \Lambda x \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} x(n) \le \Lambda x \le \limsup_{n\to\infty} x(n)\,.$$

Indication : Poser

$$\Lambda_n x := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) \quad \text{et} \quad p(x) := \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n x,$$

considérer le sous-ensemble M de ℓ^∞ des suites x telles que $(\Lambda_n x)_n$ converge et appliquer le Théorème de Hahn-Banach.
2). Calculer $\Lambda e^{(n)}$, où $e^{(n)}(k) = \delta_{nk}$, pour tous k et n. En déduire que ℓ^1 (dont ℓ^∞ est le dual) n'est pas réflexif.

Exercice 61. : Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie.
1). On suppose que E' est séparable. Soit $(e'_n)_n$ une suite dense dans E'.
1)a). Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E de norme 1 telle que $|e'_n(x_n)| \ge \|e'_n\|/2$, pour tout n.
1)b). On pose $F = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que si $e' \in E'$ s'annule sur F alors $\|e' - e'_n\| \ge \|e'_n\|/2$. En déduire que $e' = 0$.
1)c). Montrer que E est séparable.
2). Donner un exemple d'espace E séparable tel que E' ne le soit pas.

III. Théorème de Baire.

On dit qu'un espace topologique E est de Baire si, pour toute famille dénombrable d'ouverts denses dans E, leur intersection est encore dense dans E. Un espace métrique complet est de Baire (cf. cours).

Exercice 62. : Prouver qu'une intersection décroissante de compacts est non vide. En adaptant la preuve vue en cours pour les espaces métriques complets, établir que tout espace topologique localement compact (i.e. tout point de E possède une base de voisinages compacts) est de Baire.

Exercice 63. : Soit E un e.v.n, et soit F un s.e.v propre de E (ie. $F \ne E$). Quel est l'intérieur de F ? Si E est complet, peut-il s'écrire comme une réunion dénombrable de s.e.v fermés propres ?
Montrer que l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.
Prouver qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut pas être de dimension dénombrable (c'est-à-dire posséder une base de Hamel de la forme $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$).

Exercice 64. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$. Démontrer que f n'est pas limite simple d'une suite de fonctions continues.
Indications. Raisonner par l'absurde en supposant que f est la limite simple de fonctions continues f_n, et utiliser les ensembles $F_n = \cap_{p\ge n}[(f_p^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon]) \cup f_p^{-1}([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])]$ pour un ε qui sera convenablement choisi par la suite.

Exercice 65. : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 66. : Soit Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}_+^*$. Prouver qu'il existe $T > 0$ tel que l'on ait $nT \in \Omega$ pour une infinité d'entiers n.
Indications. Démontrer que, pour tout $p \geq 1$, $\cup_{n\geq p}(\frac{1}{n} \cdot \Omega)$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 67. : Continuité d'une limite simple.
1). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers f. Prouver que f est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.
Indications. Il s'agit de prouver que tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de continuité pour f. Commencer par prouver qu'il existe un intervalle $[a_1, b_1] \subset]a, b[$ et un entier p_1 tels que : $\forall x \in [a_1, b_1], \forall n, m \geq p_1, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2}$, puis itérer ce procédé.
2). En déduire que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une dérivée continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

Problme 5. : Soit E un e.v.n et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs linéairement indépendants. Démontrer que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels donnés, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $e' \in E'$ de norme ≤ 1 telle que $e'(x_i) = \alpha_i, \ \forall i = 1, \ldots, n$, est

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\|, \ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Problme 6. : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n et Γ un cône de E (ie. $\forall(x, y) \in \Gamma^2, \ \forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \ \alpha x + \beta y \in \Gamma$). On suppose que Γ est fermé, $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$, et on définit Γ', le "cône dual" de Γ, par :

$$\Gamma' = \{e' : e' \in E', e'(x) \geq 0, \forall x \in \Gamma\}.$$

Prouver que Γ' est un cône de E', puis que

$$\Gamma = \{x : x \in E, e'(x) \geq 0, \forall e' \in \Gamma'\}.$$

Enfin démontrer que, si $x \in E$ est tel que $e'(x) = 0$ pour tout $e' \in \Gamma'$, alors $x = 0$.

Problme 7. : Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ et ϕ une forme linéaire sur E satisfaisant à la condition suivante : pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(x) = x_{n(x)}$.
1). Montrer que ϕ est continue ($\phi \in E'$). Calculer sa norme.
2). Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(x) = x_p$, $\forall x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

IV. Compacité.

Exercice 68. : Soit $(\alpha_l)_l \in \ell^1$ une suite de réels positifs. Montrer, en utilisant le théorème de Tychonov, que $K = \{(x_l)_l; \forall l \in \mathbb{N}, |x_l| \leq \alpha_l\}$ est une partie compacte de ℓ^1.

Exercice 69. : Séparabilité de $C(X;\mathbb{K})$, pour X métrique compact et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
1). Vérifier que X est séparable.
2). Soit $(x_l)_l$ une suite dense dans X. On pose, pour tout $x \in X$, $f_0(x)=1$ et $f_l(x)=d(x,x_l)$ pour $l \geq 1$ (d étant la distance dans X). Montrer que l'algèbre A sur $\mathbb{K}$ engendrée par $\{f_l; l \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $C(X;\mathbb{K})$.
3). Montrer que A', l'algèbre sur $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$) engendrée par $\{f_l; l \in \mathbb{N}\}$, est dénombrable et dense dans A.

Exercice 70. : Autour de l'équicontinuité.
1). Soit X, Y des espaces métriques, avec X compact. Soit H une partie de $C(X;Y)$, équicontinue en tout $x \in X$. Montrer que H est uniformément équicontinue.
2). Équirépartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)_n$, pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En notant par $\{x\}$ la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$, on pose, pour $n \geq 1$ et f continue,

$$M_n f \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\{k\alpha\}\Big) \quad \text{et} \quad Mf \;=\; \int_0^1 f(t)\,dt\,.$$

Soit $E=\{f \in C([0;1];\mathbb{C}); f(0)=f(1)\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2)a). Montrer que $(M_n)_n$ est équicontinue.
2)b). Montrer que, pour tout polynôme trigonométrique p, $\lim_{n\to\infty} M_n p = Mp$.
2)c). En déduire que, pour tout $f \in E$, $\lim_{n\to\infty} M_n p = Mp$.
3). Soit $H \subset C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que, pour que H soit relativement compacte, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :
(i) Pour tout $a>0$, $H^a := \{f_{|[-a;a]}; f \in H\}$ est équicontinue et $H^a_x := \{f(x); f \in H^a\}$ est bornée pour tout $x \in [-a;a]$.
(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b>0$ tel que $\forall f \in H, \forall |x| \in [b;+\infty[, |f(x)| < \epsilon$.
4). Soit $f_n :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ convexes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, convergeant simplement vers f .
4)a). Montrer que $(f_n)_n$ est équicontinue sur tout $[\alpha;\beta] \subset]a;b[$.
4)b). Que peut-on dire de la convergence de $(f_n)_n$?

Travaux dirigés 4. Exercices ANAF, 2001/2002.

THEOREME DE BANACH-STEINHAUS. THEOREME DE L'APPLICATION OUVERTE. THEOREME DU GRAPHE FERME.

(I) Théorème de Banach-Steinhaus.

En dimension finie (égale à n), pour vérifier qu'un ensemble A est borné, il suffit d'établir que ses n composantes

$$A_i = e_i^*(A) := \{e_i^*(x); x \in A\},$$

dans une base donnée $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$, sont toutes des parties bornées de $\mathbb{R}$.
Pour établir la même propriété en dimension infinie, on regarde l'ensemble A à travers toutes les formes linéaires continues. C'est à ce niveau qu'intervient le théorème de Banach-Steinhaus. Ce théorème permet en effet d'obtenir une estimation uniforme à partir d'estimations ponctuelles. Voici quelques illustrations de ce principe.

Exercice 71. : Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de scalaires tels que l'on ait

$$\sum_{n\geq 0} |a_n b_n| < +\infty \ ,$$

pour toute suite $(a_n)_n$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty$. Démontrer que $\sum_{n\geq 0} |b_n|^2 < +\infty$.
Indication : considérer $\beta_N = (b_0, \ldots, b_N, 0, 0, \ldots)$.

Exercice 72. : Soit E un Banach et f une forme bilinéaire continue par rapport à chaque variable sur $E \times E$.
1). Prouver que f est continue sur $E \times E$ si, et seulement si, elle l'est en $(0, 0)$.
2). En déduire qu'une forme bilinéaire, b, définie sur $E \times E$, est continue si, et seulement si, il existe $C \geq 0$ telle que $|b(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \ \forall (x, y) \in E \times E$.
3). Démontrer que, pour toute suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de E convergeant vers 0, il existe $C \geq 0$ telle que

$$\sup_{n\geq 0}\Big(\sup\{|f(x, y_n)|, x \in E, \|x\| \leq 1\}\Big) \leq C.$$

4). En déduire que f est continue sur $E \times E$.

Lorsque la conclusion du théorème de Banach-Steinhaus est mise en défaut, c'est-à-dire $\sup_{i\in I} \|T_i\| = +\infty$, c'est que $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty$ sur un "gros" sous-ensemble de l'espace de Banach E. Plus précisément :

Exercice 73. : Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F (deux espaces de Banach). En reprenant soigneusement la preuve du théorème de Banach-Steinhaus, prouver que, si $\sup_{i\in I} \|T_i\| = +\infty$, alors il existe, non seulement un vecteur $x \in E$ tel que $\sup_i \|T_i x\| = +\infty$, mais plus exactement un ensemble dense dans E formé de vecteurs x vérifiant cette dernière condition.

Exercice 74. : Application aux séries de Fourier. [6] (chap. V).
On appelle $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues périodiques de période 1, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in \mathcal{C}$, soit $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.
1). Soit $a \in [0,1[$ fixé. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{C}$, on définit

$$T_N f = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{2i\pi na}.$$

Prouver que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, T_N est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$ et démontrer que $\|T_N\| = \int_0^1 |D_N(x)|dx$, où l'on a noté $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2i\pi nx}$ le noyau de Dirichlet.
2). En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\mathcal{D}_x$, un sous-ensemble dense de $\mathcal{C}$, tel que toutes les fonctions de $\mathcal{D}_x$ admettent une série de Fourier divergente en x.

(II) Théorème du graphe fermé.

Le théorème du graphe fermé fournit un critère pertinent en vue d'établir la continuité d'une application linéaire T d'un espace de Banach dans un autre.

Exercice 75. : Soit T une application linéaire de E dans F (deux espaces de Banach) telle que $e' \circ T \in E'$ pour tout $e' \in F'$. Prouver que T est continue (on pourra, ou bien utiliser le th. du graphe fermé, ou bien le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus mentionné au début du T.D. 4). Est-il nécessaire de supposer E et F complets ?

Exercice 76. : Soit H un espace de Hilbert. On rappelle que toute forme linéaire continue e' sur H est associée (de manière biunivoque et isométrique) à un vecteur a de H : $e'(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in H$. Soit T un opérateur linéaire sur H. On suppose que T est auto-adjoint : $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$, $\forall x, y \in H$. Prouver que T est continue (on pourra utiliser le théorème du graphe fermé ou l'exercice 75).

Exercice 77. : Soit E un espace de Banach et T une application linéaire de E dans E' telle que $(Tx)(x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Prouver que T est continue.
Indication. Utiliser le th. du graphe fermé : soit $((x_n, T(x_n))_n$ convergeant vers $(x, e') \in E \times E'$. Que doit-on démontrer ? Pourquoi peut-on se ramener à $x = 0$? Que faut-il alors démontrer pour e' ? Soit $v \in E$ quelconque. En déterminant la limite de $(Tx_n - Tv)(x_n - v)$, prouver que $|e'(v)| \leq (Tv)(v)$ et conclure.

(III) Théorème de l'application ouverte.

Exercice 78. : Soit T une application linéaire continue de E dans F, où E et F sont des espaces de Banach. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
i) Il existe $a > 0$ tel que $\|Tx\| \geq a\|x\|$, $\forall x \in E$.
ii) T est injectif et son image est fermée.

Problme 8. : Supplémentaire topologique. Opérateurs inversibles à droite (ou à gauche) [1].
On désigne par E un espace de Banach. Soient G et L deux sous-espaces vectoriels fermés tels que l'espace vectoriel $G + L$ soit fermé. Tout vecteur z de $G + L$ s'écrit sous la forme :

$$(1.1) \qquad z = x + y \ ; \ x \in G \ ; \ y \in L.$$

1). Montrer qu'il existe une constante C positive (indépendante de z) et une décomposition du type (1.1) telles que l'on ait

$$(1.2) \qquad \|x\| \leq C\|z\| \ ; \ \|y\| \leq C\|z\|.$$

Définition : *Soit $G \subset E$ un sous-espace fermé de E. On dit qu'un sous-espace L de E est un supplémentaire topologique de G si :*
(i) L est fermé.
(ii) $G \cap L = \{0\}$ et $G + L = E$.
Remarque : *Le point (ii) assure que L est un supplémentaire algébrique de G. Le point (i) ajoute une condition topologique.*
2). Sous les hypothèses de la définition 1.1, prouver que les projecteurs :

$$(1.4) \qquad p_G : z \mapsto x \quad \text{et} \quad p_L : z \mapsto y$$

sont des opérateurs linéaires continus sur E.
3). Montrer que tout sous-espace G de dimension finie admet un supplémentaire topologique.
4). Montrer que tout sous-espace G fermé de codimension finie admet un supplémentaire topologique.
5). Soit $N \subset E'$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Etablir que ${}^{\perp}N$ admet un supplémentaire topologique dans E.
6). Prouver que, dans un espace de Hilbert, tout sous-espace fermé G admet un supplémentaire topologique.
Remarque : *Tout espace de Banach non isomorphe à un espace de Hilbert possède des sous-espaces sans supplémentaire topologique : par exemple c_0 dans ℓ_∞.*
Soit F un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjectif. Le théorème de l'application ouverte montre qu'il existe une constante C positive telle que l'on ait :

$$(1.5) \qquad \forall y \in F, \ \exists x \in E \ \textit{tel que} \ Tx = y \ \textit{et} \ \|x\| \leq C\|y\|.$$

Il est naturel de se poser la question de savoir si l'on peut construire un opérateur linéaire continu S de F dans E tel que $T \circ S = Id_F$.
Définition : *On dit que S est un inverse à droite (resp. à gauche) de T si S est une application linéaire continue de F dans E telle que :*

$$T \circ S = Id_F \quad (\text{resp. } S \circ T = Id_E).$$

7). Etablir que les propriétés i) et ii) [resp. i') et ii')] ci-dessous sont équivalentes :
i) T admet un inverse à droite.
ii) Ker$T$ admet un supplémentaire topologique dans E.
i') T admet un inverse à gauche.
ii') ImT est fermée et admet un supplémentaire topologique dans F.

Problme 9. : Application "presque surjective" [3].
Soient E, F des espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F satisfaisant à la condition suivante :
(H) Il existe $\alpha \in]0, 1[$, $C \in \mathbb{R}_+$, tels que, pour tout $y \in F$, $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que

$$\|y - Tx\| \leq \alpha \ \text{ et } \ \|x\| \leq C.$$

(on dit que T est presque surjective).
1). Soit $y \in F$, $\|y\| \leq 1$. Démontrer qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in E$ tels que l'on ait, pour tout $n \geq 1$, $\|x_n\| \leq C$, et

$$(*) \quad \|y - T(x_1) - \ldots - \alpha^{n-1}T(x_n)\| \leq \alpha^n.$$

2). En déduire que T est surjective, plus précisément que : pour tout y dans la boule unité de F, il existe $x \in E$ tel que $Tx = y$ et $\|x\| \leq C/(1-\alpha)$.
3). Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications linéaires surjectives continues de E dans F. Prouver que $\mathcal{S}$ est un ouvert de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$.
4). Application : un cas particulier du théorème d'extension de Tietze.
Soit (X, d) un espace métrique et Y un fermé de X. On munit Y de la distance induite par d. L'objet de cet exercice est de démontrer, dans le cadre restrictif des fonctions continues bornées, le théorème de Tietze dont l'énoncé général est le suivant :
Toute fonction continue g de Y dans $\mathbb{R}$ admet un prolongement continu f sur X (ie. f est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f_{|Y} = g$).
A cet effet, on note $\mathcal{C}_B(X)$ (resp. $\mathcal{C}_B(Y)$) l'espace des fonctions à valeurs réelles, continues et bornées, définies sur X (resp. sur Y). Ces deux espaces sont munis de la norme de la convergence uniforme qu'on notera indifféremment $\|\cdot\|_\infty$. Soit enfin T l'application "restriction" de $\mathcal{C}_B(X)$ dans $\mathcal{C}_B(Y)$: $Tf = f_{|Y}$.
Soit $g \in \mathcal{C}_B(Y)$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$. En considérant les ensembles

$$Y_+ = \{y : y \in Y, \frac{1}{3} \leq g(y) \leq 1\} \ \text{ et } \ Y_- = \{y : y \in Y, -1 \leq g(y) \leq -\frac{1}{3}\},$$

ainsi que la fonction

$$f(x) = (\frac{1}{3})\frac{d(x, Y_-) - d(x, Y_+)}{d(x, Y_-) + d(x, Y_+)}, \quad x \in X,$$

démontrer que T satisfait à la condition (H) (avec des constantes α et C que l'on précisera). En déduire le théorème de Tiestze dans le cas des fonctions continues bornées (que dire en outre de la norme de la fonction qui prolonge g ?).
Remarque : *Le théorème de Tietze général se déduit de ce cas particulier (cf. [3]).*

Problme 10. : Semi-groupe d'opérateurs.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $\{S(t), t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans E vérifiant les conditions suivantes :
i) $S(0) = Id$ (opérateur identité sur E).
ii) $S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad \forall s, t \geq 0$.
iii) $\lim_{t \to 0} S(t)x = x, \quad \forall x \in E$.
1). Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, \delta[.$$

2). En déduire qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Problme 11. : Bases de Schauder.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On dit qu'un système $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de Schauder dans E si, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(x_n)_n$ de scalaires tels que

$$\lim_{N\to+\infty}\Big\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n f_n\Big\| = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n x = \sum_{n=0}^{N} x_n f_n,$$

et on note encore $\|\cdot\|$ la norme d'opérateurs associée à la norme sur E.
1). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Schauder de E.
a). Démontrer que

$$|x| = \sup_{n\geq 0}\|S_n x\|$$

définit une norme sur E, puis que $S_n \circ S_m = S_n,\ \forall n \leq m$.
b). Soit $(x^{(k)})_k$ une famille de vecteurs de E tels que, pour tout $n \geq 0$, la suite $(S_n x^{(k)})_k$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers un vecteur noté y_n quand $k \to +\infty$. Montrer qu'il existe une famille $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que $y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j f_j,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
c). Démontrer que $(E, |\cdot|)$ est complet et que les normes $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$ sont équivalentes.
2). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système de vecteurs de E. Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de Schauder dans E si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont satisfaites :
i) $f_n \neq 0,\ \forall n \geq 0$.
ii) Il existe une constante K telle que l'on ait, pour toute suite de scalaires $(a_n)_n$ et pour tout couple (n, m) d'entiers tels que $n < m$,

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} a_k f_k\Big\| \leq K\Big\|\sum_{k=0}^{m} a_k f_k\Big\|.$$

iii) L'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs f_n est dense dans E (on dit alors que le système $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est total).
Pour la réciproque, on pourra démontrer, grce à ii), que l'ensemble F des vecteurs de la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n f_n$ est un espace fermé dans E.
3). On définit sur $[0, 1]$, $\psi_1(t) = 1$, puis pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 1, 2, \ldots, 2^j$:
$\psi_{2^j+k}(t) = 1$ si $t \in [(2k-2)2^{-(j+1)}, (2k-1)2^{-(j+1)}]$.
$\psi_{2^j+k}(t) = -1$ si $t \in](2k-1)2^{-(j+1)}, (2k)2^{-(j+1)}]$.
$\psi_{2^j+k}(t) = 0$ sinon.
Prouver que la famille $\{\psi_n, n \geq 1\}$ (appelé système de Haar) forme une base de Schauder dans l'espace de Lebesgue $\mathrm{L}^p([0, 1])$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ [on pourra démontrer que les conditions i), ii)(avec $K = 1$), et iii) sont satisfaites].
4). On définit sur $[0, 1]$ les fonctions $\phi_1(t) = 1$ et

$$\phi_n(t) = \int_0^t \psi_{n-1}(x)\,dx\ .$$

Démontrer que le sytème $\{\phi_n, n \geq 1\}$ (appelé système de Schauder) forme une base de Schauder dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Problme 12. : Fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et E un espace de Banach. On dit qu'une fonction f, définie de Ω dans E, est holomorphe sur Ω si, pour tout $z \in \Omega$, la quantité

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

admet une limite dans E quand h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. On dit que f est faiblement holomorphe sur Ω si, pour tout $e' \in E'$, la fonction $e' \circ f$ est holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$. Vérifier que toute fonction holomorphe est faiblement holomorphe. L'objet de ce problème est de prouver la réciproque.
A cet effet on considère une fonction f faiblement holomorphe sur Ω, et un point $z \in \Omega$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $z+h \in \Omega$, on pose :

$$g(h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

1). Soit $e' \in E'$. A l'aide de la formule de Cauchy, démontrer qu'il existe une constante $C'_e \geq 0$ telle que l'on ait, pour tous h et k, $h \neq k$, de module suffisamment petit,

$$\left| e' \left(\frac{g(h)-g(k)}{h-k} \right) \right| \leq C'_e.$$

2). En déduire qu'il existe $C \geq 0$ telle que l'on ait

$$\|g(h)-g(k)\| \leq C|h-k|$$

pour tout couple de nombres complexes satisfaisant à la condition précédente et, enfin, prouver que f est holomorphe sur Ω.

Problme 13. : [2].
Soit V un s.e.v fermé de $\mathrm{L}^1([0,1])$, d'intérieur non vide et contenu dans $\cup_{p>1}\mathrm{L}^p([0,1])$. Pour $p > 1$, on note $V_p = V \cap \mathrm{L}^p([0,1])$ et

$$\phi_p : (V_p, \|\cdot\|_p) \longrightarrow (V, \|\cdot\|_1)$$

l'injection canonique.
1). Prouver que ϕ_p est une application continue.
2). On suppose que ϕ_p n'est pas surjective. Montrer alors que l'ensemble $\phi_p(V_p)$ est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.
3). En déduire l'existence d'un indice p, $p > 1$, tel que $V \subset \mathrm{L}^p([0,1])$.

Travaux dirigés 5. Exercices ANAF, 2001/2002.

THÉORIE SPECTRALE.

(I) Opérateur borné sur un Banach.

Exercice 79. : Formule des résolvantes. Soit $A, B \in \mathcal{GL}(E)$, le groupe des éléments inversibles dans $\mathcal{L}(E)$ (E est un espace vectoriel normé). Établir l'égalité

$$A^{-1} - B^{-1} \;=\; A^{-1}(B-A)B^{-1}\,.$$

En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $\mathcal{GL}(E) \ni A \mapsto A^{-1}$ est différentiable. Quelle est la différentielle ?

Exercice 80. : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, où $E = C([0;1];\mathbb{C})$, donné par $Tf(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy$, pour K continue de $\{(x,y) \in [0;1]^2; y \leq x\}$ dans $\mathbb{C}$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. En déduire le spectre de T.

Exercice 81. : Soient S et T des opérateurs continus sur un espace de Banach. Montrer que les valeurs spectrales non nulles de ST et TS concident. Montrer que, si S ou T est inversible, alors $\sigma(ST) = \sigma(TS)$. Qu'en est-il dans le cas général ? (on pourra considérer $I + T(\lambda - ST)^{-1}S$ et des translations dans ℓ^p).

Exercice 82. : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, où E est un Banach complexe. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
1). Montrer que $P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$ (on pourra utiliser la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles).
2). On suppose $P(T) = 0$. Trouver $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C}; Q(z) = 0\}$ et tel que, pour $\lambda \in \rho(T)$,

$$(\lambda - T)^{-1} \;=\; \frac{1}{Q(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(T-\lambda)^{k-1}\,.$$

3). Soit $P \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0; I\}$ tel que $P^2 = P$. Montrer que $vp(P) = \sigma(P) = \{0;1\}$.

Exercice 83. : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments de $\rho(T)$ convergeant vers λ. On suppose que la suite $((\lambda_n - T)^{-1})_n$ est bornée. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$ (on pourra utiliser la formule des résolvantes).

Exercice 84. : Soit X un espace métrique, $E = C_b(X)$ et T un opérateur sur E préservant la positivité : $f \geq 0 \Longrightarrow Tf \geq 0$.
1). Montrer que, pour tout f réelle, Tf l'est aussi et que $|Tf| \leq T|f|$. **2).** Montrer que, pour tout $f \in E$, $|Tf| \leq T|f|$ (on pourra utiliser le fait que, si $|Tf(x)| = \alpha(x)Tf(x)$, alors $\alpha(x)Tf(x) = T\Re(\alpha(x)f)(x)$).
3). Montrer que T est continu.

4). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > r(T)$. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$. En utilisant un développement en série, montrer que

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leq \left\|(|\lambda| - T)^{-1}\right\| .$$

4). On suppose que $r(T) \notin \sigma(T)$. Montrer qu'alors $|\lambda| = r(T)$ implique $\lambda \in \rho(T)$. Conclure que $r(T) \in \sigma(T)$.

Exercice 85. : Soit T l'opérateur sur $C([0;1];\mathbb{C})$ défini par $Tf(0) = \pi f(0)/2$ et par

$$\forall x > 0 \, , \, Tf(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dy \, .$$

Montrer que T est continue sur $C([0;1];\mathbb{C})$ et que $\|T\| = \pi/2$. Montrer que tout point de $]0;\pi/2]$ est une valeur propre de T. En déduire le rayon spectral de T.

Exercice 86. : *Approximation de Galerkin.* Soit H un Hilbert réel, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H et ϕ une forme linéaire continue sur H. On note par u l'unique élement de H tel que, pour tout $x \in H$, $a(u,x) = \phi(x)$. Soit $(H_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces fermés de H dont la réunion est dense dans H .
1). Montrer que, pour tout n , il existe un unique $u_n \in H_n$ tel que, pour tout $x \in H_n$, $a(u_n, x) = \phi(x)$.
2). Soit P_n la projection orthogonale sur H_n . Prouver que $a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - P_n u)$. En déduire que $\lim_n u_n = u$.

Exercice 87. : *Spectre des opérateurs de rang fini.* Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ de rang fini.
1). Soit $F = \mathrm{Im} T$ et T_F l'opérateur défini sur F par $T_F x = Tx$. Montrer que T et T_F ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2). Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $S = \lambda I_F - T_f \in \mathcal{L}(F)$. On suppose S inversible. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$ (on pourra introduire l'opérateur $(\lambda - T)(I + S^{-1}T)^{-1}$).
3). Montrer que $\sigma(T) \cap \mathbb{K}^* = vp(T) \cap \mathbb{K}^*$.
4). Montrer que, si E est de dimension infinie, alors $0 \in vp(T)$.
5). Montrer que $\sigma(T) = vp(T)$.

Exercice 88. : *Analyticité de la résolvante.* Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\mu \in \rho(T)$. Montrer que, si $|\lambda - \mu| < \|R(\mu, T)\|^{-1}$, alors $\lambda \in \rho(T)$ et

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^{n+1} \, .$$

En déduire que $\|R(\mu, T)\| \geq d(\mu, \sigma(T))^{-1}$.

Exercice 89. : *Théorème de l'image spectrale.* Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et h une fonction holomorphe dans un voisinage Ω de $\sigma(T)$. On va montrer que $h(\sigma(T)) = \sigma(h(T))$.
1). Soit $z_0 \in \sigma(T)$. En factorisant $h - h(z_0)$, montrer que $h(\sigma(T)) \subset \sigma(h(T))$.
2). Soit $z_0 \notin h(\sigma(T))$. En introduisant la fonction $z \mapsto (z_0 - h(z))^{-1}$, montrer que $z_0 \notin \sigma(h(T))$.

Problme 14. : Soit E un Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ un point isolé dans $\sigma(T)$.
1). Montrer que, dans une couronne $\{z; 0 < |z-\lambda| < r\}$ avec $r > 0$, $z \mapsto R(z,T) := (T-zI)^{-1}$ est développable en série de Laurent

$$R(z,T) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z-\lambda)^k A_k$$

avec $A_k \in \mathcal{L}(E)$, pour tout k .
2). Vérifier que, pour tout n et m , $A_n A_m = (b_n + b_m - 1)A_{n+m+1}$, où $b_n = 1$ si $n \geq 0$ et $b_n = 0$ si $n < 0$.
3). Vérifier que $-A_{-1}$ est un projecteur, noté P . Montrer qu'il commute avec $R(z,T)$. En déduire qu'il commute avec T . Montrer que T se décompose dans la somme directe topologique $E = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P$ en deux opérateurs $T_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}P)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}P)$ (on expliquera pourquoi la somme est topologique).
4). On pose $D = -A_{-2}$ et $S = A_0$. Vérifier que, pour tout $k \geq 2$, $A_{-k} = -D^{k-1}$. Vérifier que, pour tout $n \geq 0$, $A_n = S^{n+1}$.
5). Établir que $PD = DP = D$ et que $PS = SP = 0$. En utilisant $TR(z,T) = I + zR(z,T)$, montrer que $(T-\lambda I)P = D$ et que $(T-\lambda I)S = I - P$.
L'opérateur D (resp. S) se décompose donc en D_1 et D_2 (resp. S_1 et S_2) dans la somme topologique du 3). On a donc $(T_1 - \lambda I) = D_1$ et $S_1 = 0$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{Im}P)$, $(T_2 - \lambda)$ inversible d'inverse S_2 et $D_2 = 0$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{Ker}P)$.
6). Montrer que la limite $\lim_{z\to\lambda} R(z,T)(I-P)$ existe et vaut S. S est appelé la résolvante réduite de T en λ .
7). Montrer $R(z,T)P$ est donné par une série entière de la variable $1/(z-\lambda)$, cette série étant convergente sur $\mathbb{C}$. En déduire que $r(D) = 0$. On dit que D est quasi-nilpotent.
8). On suppose que $\mathrm{Im}P$ est de dimension finie p. Montrer que $D^p = 0$. En déduire que λ est une valeur propre de T de multiplicité (i.e. la dimension de $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)) \leq p$. Au passage, $\mathrm{Im}P$ est le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^p$ associé à λ .
9). On suppose T compact et $\lambda \neq 0$. Montrer que P est aussi compact. En déduire que $\mathrm{Im}P$ est de dimension finie p. Vérifier que $\mathrm{Ker}P = \mathrm{Im}(T-\lambda I)^p$.

(II) Adjoint. Opérateur auto-adjoint.

Exercice 90. : Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert H, et soit T^* l'opérateur adjoint de T ($\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, $\forall x, y \in H$).
1). Prouver que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.
2). Montrer que $\mathrm{Ker}T^* = (\mathrm{Im}T)^\perp$ et $(\mathrm{Ker}T)^\perp = \overline{(\mathrm{Im}T^*)}$.
3). On suppose que H est un Hilbert sur $\mathbb{C}$. Montrer que si T est positif : $\forall x \in H$, $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, alors $T^* = T$. Est-ce encore vrai sur un espace de Hilbert réel ?

Exercice 91. : Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ qui commute avec son adjoint T^* (on dit que T est normal).
1). Prouver que les vecteurs Tx et T^*x ont la même norme pour tout $x \in H$, et que $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} Id)$ pour tout nombre complexe λ.
2). Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
i) $(T - \lambda Id)$ est non inversible (ie. λ est dans le spectre de T).

ii) il existe une suite $(x_n)_n$ de vecteurs de norme 1 tels que $\lim_{n\to+\infty}(Tx_n - \lambda x_n) = 0$ (on dit dans ce cas que λ est une valeur propre approchée).

Exercice 92. : Soit T l'opérateur défini sur $\mathrm{L}^2([0,1];\mathbb{C})$ par

$$Tf(x) \;=\; \int_0^x f(y)\,dy\,.$$

Calculer T^* et TT^* . En déduire le rayon spectral de TT^* puis la norme de T .

Exercice 93. : Montrer que, pour un opérateur auto-adjoint dans un Hilbert, le rayon spectral coïncide avec sa norme.

Exercice 94. : [5].
Soit H un espace de Hilbert, et soit A un opérateur auto-adjoint quelconque sur H.
1). Vérifier que, si A est inversible, alors A^{-1} est encore auto-adjoint.
2). Soit A un opérateur auto-adjoint sur H. Montrer que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

On pourra utiliser l'égalité suivante valable pout tout $\lambda > 0$:

$$\|Ax\|^2 = \frac{1}{4}\langle A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax), \lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\rangle - \frac{1}{4}\langle A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax), \lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\rangle.$$

3). Etant donné deux opérateurs auto-adjoints A et B, on écrit $A \le B$ si

$$\langle Ax, x\rangle \le \langle Bx, x\rangle \;\text{ pour tout } x \in H.$$

Vérifier que "$\le$" est une relation d'ordre sur l'ensemble des opérateurs auto-adjoints.
4). On définit les réels

$$m_A = \inf\{\langle Ax, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$M_A = \sup\{\langle Ax, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Montrer que ces nombres sont bien définis, qu'ils sont respectivement le plus grand nombre réel m et le plus petit nombre réel M tels que $m \cdot Id \le A \le M \cdot Id$.
5). Supposons que $A \ge 0$. Démontrer alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée :

$$|\langle Ay, x\rangle|^2 \le \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle,\;\forall x, y \in H.$$

6). Démontrer qu'une condition nécéssaire et suffisante pour que $\|Id - A\| < 1$ est que $0 < m_A \le M_A < 2$. Prouver que, dans ce cas, A est inversible. En déduire que A est inversible dès que $m_A > 0$.

Problme 15. : *Opérateurs de Hilbert-Schmidt.* Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On note par $\mathcal{H}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des opérateurs de Hilbert-Schmidt (cf. problème 29).
1). Soit $E = \mathrm{L}^2([0,1];\mathbb{C})$. On prend une base hilbertienne $(e_n)_n$ de E. Montrer que $e_m \otimes \bar{e_n}$

est une base hilbertienne de $L^2([0,1]^2;\mathbb{C})$.
2). On note par T_K l'opérateur sur $L^2([0,1];\mathbb{C})$ à noyau $K \in L^2([0,1]^2;\mathbb{C})$. Montrer que $T_K \in \mathcal{H}(E)$ et que $\|T_K\|_2 = \|K\|_2 = \|(k_{m,n})_{m,n}\|_2$, où $\|K\|_2$ est la norme de K dans $L^2([0,1]^2;\mathbb{C})$ et $\|(k_{m,n})_{m,n}\|_2$ celle de la suite $(k_{m,n})_{m,n}$ définie par $k_{m,n} := \langle K, e_m \otimes \bar{e_n}\rangle = \langle T_K e_m, e_n\rangle$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^2)$.
3). Réciproquement, pour $T \in \mathcal{H}(E)$, montrer que $T = T_K$ où $K = \sum\limits_{m,n} \langle T_K e_m, e_n\rangle e_m \otimes \bar{e_n}$.

Problme 16. : Un théorème ergodique, [2].
Soit H un espace de Hilbert, et soit U une isométrie sur H, c'est-à-dire :

$$\|Ux\| = \|x\|, \ \forall x \in H.$$

1). Prouver que $U^*U = Id$ et que $Ux = x$ si, et seulement si, $U^*x = x$.
2). Prouver que, pour tout $x \in H$, la suite de vecteurs

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} U^j x, \ N \geq 1\right)$$

converge vers Px, où P est la projection orthogonale sur l'espace des invariants de U.
Indication : démontrer que l'orthogonal de $\mathrm{Im}(U - Id)$ concide avec $\mathrm{Ker}(U - Id)$.
3). Généraliser le résultat 2) à $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$ (on pourra vérifier que, pour $x \in H$, les trois conditions suivantes sont équivalentes : (a) $Tx = x$, (b) $\mathcal{R}e\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2$, (c) $T^*x = x$).

Problme 17. : Théorème de Paley et Wiener. Voir [5].
Soient H un espace de Hilbert, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée dans H, et enfin soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système de vecteurs de H. On suppose qu'il existe une constante $\theta \in]0,1[$ telle que l'on ait, pour toute famille $(a_n)_n$ de scalaires, nuls sauf pour un nombre fini d'indices,

$$(*) \qquad \|\sum_{n\geq 0} a_n(\phi_n - f_n)\|^2 \leq \theta^2 \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.$$

1). Démontrer que $K : x \mapsto \sum_{n\geq 0}\langle x, \phi_n\rangle(\phi_n - f_n)$ est un opérateur linéaire continu sur H, de norme $\leq \theta$, et en déduire que $T = Id - K$ est inversible sur H.
2). Démontrer qu'il existe un système $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de H tels que $\langle f_n, g_m\rangle = \delta_{n,m}$ pour tout couple d'entiers (n,m), et tels que tout vecteur x de H admette les développements suivants au sens de la convergence dans H :

$$x = \sum_{n\geq 0}\langle x, g_n\rangle f_n \quad \text{et} \quad x = \sum_{n\geq 0}\langle x, f_n\rangle g_n,$$

avec en outre les inégalités

$$(1-\theta)\|x\| \leq \left(\sum_{n\geq 0} |\langle x, f_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (1+\theta)\|x\|$$

$$(1+\theta)^{-1}\|x\| \leq \left(\sum_{n\geq 0} |\langle x, g_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (1-\theta)^{-1}\|x\|.$$

Les systèmes $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sont appelés bases de Riesz duales l'une de l'autre.
3). *Application aux séries de Fourier non-harmoniques.* On considère dans l'espace de Lebesgue usuel $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$ les fonctions :$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda_n x}, n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que, si

$$M = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n - n| < \frac{\ln 2}{\pi},$$

alors le système $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la condition $(*)$.

Problme 18. : Suite croissante d'opérateurs auto-adjoints. Applications. [5].
1). On désigne par H un espace de Hilbert. Soit $(A_n)_n$ une famille d'opérateurs auto-adjoints tels que l'on ait, au sens de la relation d'ordre définie dans l'exercice 94),

$$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq Id.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée (établie dans l'exercice 94)

$$|\langle Ay, x\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle$$

avec $A = A_n - A_m$ pour $m < n$, et $y = (A_n - A_m)x$, démontrer que

$$\|A_n x - A_m x\|^4 \leq (\langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle)\,\|x\|^2,$$

et en déduire que $(A_n x)_n$ converge dans H vers un vecteur qu'on notera Ax (on dit alors que la suite d'opérateurs $(A_n)_n$ converge fortement dans H vers l'opérateur A). Vérifier que A est un opérateur linéaire continu auto-adjoint.
2). Déduire de la question précédente que toute suite monotone et bornée d'opérateurs auto-adjoints converge fortement vers un opérateur continu auto-adjoint sur H.
3). Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une famille de vecteurs de H. On suppose qu'il existe des constantes strictement positives A et B telles l'on ait, pour tout $x \in H$,

$$(*) \quad A\|x\|^2 \leq \sum_{n\geq 0} |\langle x, f_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Démontrer que, pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n\geq 0}\langle x, f_n\rangle f_n$ converge dans H, et que l'application $R : x \mapsto \sum_{n\geq 0}\langle x, f_n\rangle f_n$ définit un opérateur continu auto-adjoint positif, bijectif et bicontinu, sur H (pour prouver la bijectivité on pourra utiliser l'exercice 94).
En déduire qu'il existe un système "dual" $(g_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant à une condition du type $(*)$, et tel que tout vecteur x de H admette les développements

$$x = \sum_{n\geq 0}\langle x, f_n\rangle g_n = \sum_{n\geq 0}\langle x, g_n\rangle f_n.$$

Problme 19. : Soit $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2(T^2)$ l'espace de Lebesgue sur le tore de dimension 2,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

D l'application du tore T^2 dans lui-même définie par $Dx = Ax$ (modulo $\mathbb{Z}^2$) et, enfin, T l'application sur L^2 donnée par : $(Tf)(x) = f(Dx)$.
1). Vérifier que T est une isométrie sur L^2.
2). Démontrer que le système $\{e_\gamma(x) = e^{2i\pi(\gamma,x)}, \gamma \in \mathbb{Z}^2\}$ forme une base orthonormée de L^2, où l'on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$.
3). Prouver que : $\lim_{n\to+\infty}\langle T^n f, g\rangle = (\int_{T^2} f(x)dx)(\int_{T^2} g(x)dx), \quad \forall f, g \in \mathrm{L}^2$.

Travaux dirigés 6. Exercices ANAF, 2001/2002.

THEORIE SPECTRALE DES OPERATEURS COMPACTS.

Exercice 95. : Soit E un espace de Banach. L'opérateur identité sur E est-il compact?

Exercice 96. : Soit $(a_n)_n$ une suite bornée de réels, et soit T l'opérateur défini sur $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$ ($p \in [1, +\infty[$) de la manière suivante :

$$(Tx)_n = a_n x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = (x_n)_n \in \ell^p.$$

1). Montrer que T est un opérateur continu. Déterminer la norme de T, ses valeurs propres et son spectre. Décrire son opérateur adjoint T^* ?
2). Prouver que T est compact si, et seulement si, $(a_n)_n$ converge vers 0.

Exercice 97. : Soit E, F deux espaces de Banach et T un opérateur de E dans F. L'objet de cet exercice est de montrer le théorème de Schauder suivant : T est compact si, et seulement si, son transposé T' l'est.
1). On suppose que T est compact. Soit $K = \overline{T(B_E)}$, où B_E désigne la boule unité de E. Soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $B_{F'}$, la boule unité de F'. Soit A la partie de $C(K;\mathbb{C})$ définie par

$$A \;:=\; \left\{\phi_n : K \ni x \mapsto v_n(x); n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1)a). Montrer l'existence d'une suite $(\phi_{n_k})_k$ d'éléments de A convergeant dans $C(K;\mathbb{C})$ vers une fonction $\phi \in C(K;\mathbb{C})$.
1)b). En déduire que $(T'v_{n_k})_k$ est de Cauchy dans E'. Conclure.
2). On suppose T' compact. Soit J l'injection canonique de F dans F''.
2)a). Vérifier que T'' l'est aussi.
2)b). Montrer que $T(B_E) = T''(B_E)$ et que $J(F)$ est fermé dans F''.
2)c). En déduire que $T(B_E)$ est relativement compact dans F.

Exercice 98. : Soit T un opérateur compact sur un espace de Hilbert H .
1). Soit $\epsilon > 0$ et $x_1, \cdots, x_n \in H$, tels que $T(B(0;1[) \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon[$. Soit X l'e.v. de dimension finie engendré par les x_i et $S = P_X T$, où P_X est la projection orthogonale sur X. Montrer que $\|S - T\| < 2\epsilon$.
2). En déduire que, dans un espace de Hilbert, tout opérateur compact est limite, pour la norme d'opérateur, d'opérateurs de rang fini.

Exercice 99. : Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.
1). Soit K une fonction continue sur $[0;1]^2$ et T l'opérateur sur $\mathcal{C}$ défini par :

$$(Tf)(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)dy \,.$$

Démontrer que T est un opérateur compact : on donnera deux preuves, l'une où l'on utilise la définition d'un opérateur compact (l'image de la boule unité est relativement

compacte), l'autre où l'on approche T par une suite d'opérateurs de rang fini.
2). On définit sur $\mathcal{C}$ l'application

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)dy \quad \text{(opérateur de Volterra).}$$

Prouver que V est un opérateur compact sur $\mathcal{C}$. Déterminer $\sigma(V)$. 0 est-il une valeur propre de V ?
3). Prouver que l'opérateur $(Tf)(x) = xf(x)$ n'est pas compact sur l'espace $\mathcal{C}$ (chercher un espace de dimension infinie sur lequel T est inversible).

Exercice 100. : Soit $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2([0,1])$ l'espace de Lebesgue usuel, et soit $(x,y) \mapsto K(x,y)$ une fonction, à valeurs réelles, de carré intégrable sur $C = [0,1]^2$.
1). Vérifier que, pour tout $f \in \mathrm{L}^2$, et pour presque tout $x \in [0,1]$, l'intégrale

$$(Tf)(x) = \int_{[0,1]} f(y)K(x,y)dy$$

existe, et que T est un opérateur linéaire continu sur L^2. Majorer simplement $\|T\|$.
2). On rappelle que $\{e_{p,q}(x,y) = e^{2i\pi px}e^{2i\pi qy},\ p,q \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée dans $\mathrm{L}^2(C)$. En utilisant la méthode d'approximation par des opérateurs de rang fini , démontrer que T est un opérateur compact sur L^2. Enfin décrire l'adjoint de T.

Exercice 101. :
1). On munit $\mathbb{C}^n$ de sa structure hermitienne usuelle. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\|f\| = 1$ et $\sigma(f) = \{1\}$. Montrer que $f = Id$.
2). Soit V l'opérateur de Volterra (cf. exercice 99), mais cette fois-ci considéré comme agissant sur l'espace de Lebesgue usuel $\mathrm{L}^2([0,1])$. Quelles sont les propriétés de V ? Décrire V^* . Pourquoi a-t-on : $-1 \notin \sigma(V)$?
3). La propriété du 1) ne subsiste pas dans un espace de Hilbert de dimension infinie : on pose $A = (I+V)^{-1}$. Etablir que $\|A\| = 1$ et $\sigma(A) = \{1\}$.

Exercice 102. : Soient S, T des opérateurs linéaires continus sur un Banach E.
1). Prouver que l'égalité $ST = Id$ n'implique pas nécessairement que $TS = Id$ (penser à des opérateurs du type "décalage" sur les espaces de suites).
2). On suppose que T est compact et tel que $S(Id-T) = Id$. Prouver que $(Id-T)S = Id$ et que l'opérateur $Id - (Id-T)^{-1}$ est compact (on pourra écrire $Id - (Id-T)^{-1}$ comme le produit d'un opérateur compact par un opérateur continu).

Exercice 103. : Soit $\mathcal{C}([0,\pi])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,\pi]$ muni de la norme usuelle. Décrire le spectre de l'opérateur T sur $\mathcal{C}([0,\pi])$ par $(Tf)(x) = \int_0^\pi \sin(x+y)f(y)dy$, $x \in [0,\pi]$, $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$. Pour $g \in \mathcal{C}([0,\pi])$ donnée, résoudre l'équation

$$f(x) = g(x) + \int_0^\pi \sin(x+y)f(y)dy, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Exercice 104. : Soit E un Hilbert, $(f_n)_n$ une base hilbertienne de E et $(\mu_n)_n$ une suite bornée de complexes. Montrer que

$$Tx \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, f_n \rangle f_n$$

définit sur E un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il est compact si, et seulement si, $(\mu_n)_n$ tend vers 0, et qu'il est auto-adjoint si, et seulement si, les μ_n sont réels.

Exercice 105. : Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur un Hilbert séparable. Pour chaque valeur propre non nulle λ de T, soit d_λ la dimension du sous-espace propre correspondant. Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt si, et seulement si,

$$\sum_{\lambda \in vp(T)\setminus\{0\}} d_\lambda \lambda^2 \ < \ \infty \, .$$

Problme 20. : Diagonalisation d'une matrice symétrique.
Soit A un endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et soit q la forme quadradique associée. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.
1). Pourquoi existe-t-il $x_0 \in \mathbb{R}^n$, de norme 1, tel que $q(x_0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2=1} q(x)$?
2). On note $\lambda = q(x_0)$. Que dire de la forme quadratique $q_1(x) = \lambda\|x\|_2^2 - q(x)$? En déduire que x_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
3). En itérant la méthode précédente, prouver que A est diagonalisable dans une base orthonormée.

Problme 21. : Généralisation aux opérateurs auto-adjoints compacts [5].
Soit A un opérateur auto-adjoint sur un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert H de dimension infinie. On suppose que A est compact, c'est-à-dire que, pour toute famille $(x_n)_n$ bornée dans H, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(Ax_{n_k})_k$ converge dans H.
1). En adaptant la méthode du problème 20 (attention la boule unité de H n'est pas compacte !), prouver qu'il existe un vecteur $\phi_1 \neq 0$ tel que $A\phi_1 = \mu_1\phi_1$, avec $\mu_1 = \|A\|$ ou $\mu_1 = -\|A\|$ (utiliser la question 2) de l'exercice 94).
2). Démontrer qu'il existe une famille $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs de norme 1, orthogonaux deux à deux, et vérifiant $A\phi_n = \mu_n\phi_n$ pour tout $n \geq 1$, où $(\mu_n)_n$ est une suite de réels tels que $(|\mu_n|)_n$soit décroissante. Prouver que la suite $(\mu_n)_n$ converge vers 0.
3). Démontrer que $Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n\langle x, \phi_n\rangle\phi_n$ (au sens de la convergence dans H), et que toute valeur propre de A différente de 0 est égale à l'une des valeurs μ_n.

Problme 22. : Calcul fonctionnel pour un opérateur auto-adjoint compact.
Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur un Hilbert E sur $\mathbb{C}$. On rappelle que

$$T \ = \ \sum_{\lambda\in vp(T)} \lambda P_\lambda \, ,$$

où P_λ désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ. Soit $f : vp(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée.
1). Montrer que l'expression

$$f(T) \ := \ \sum_{\lambda\in vp(T)} f(\lambda)P_\lambda$$

définit un opérateur de $\mathcal{L}(E)$.
2). Montrer que

$$\forall x \in E \, , \ \ \|f(T)x\|^2 \ = \ \sum_{\lambda\in vp(T)} |f(\lambda)|^2\|P_\lambda x\|^2 \quad \text{et} \quad \|f(T)\| \ = \ \sup_{\lambda\in vp(T)} |f(\lambda)| \, .$$

3). Soit $f : vp(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée. Montrer que $(fg)(T) = f(T)g(T)$.
4). Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que

$$P(T) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

($P(T)$ étant défini par 1)). Même chose pour une série entière convergente sur $\mathbb{C}$.
5). Montrer que, pour tout $\mu \in \rho(T)$, $(z \mapsto 1/(\mu - z))(T) = R(\mu, T)$.
6). Dans cette question, on suppose que E est de dimension infinie, que f est définie sur $vp(T) \cup \{0\}$ et que f est continue en 0 . Montrer que $f(T)$ est compact si, et seulement si, $f(0) = 0$ et que $f(T)$ est auto-adjoint si, et seulement si, f est réelle.

Problme 23. : Formules de Courant-Fischer. Soit E un espace de Hilbert séparable, non réduit à $\{0\}$ et T un opérateur auto-adjoint, compact et positif sur E . On ordonne la suite des valeurs propres non nulles de T sous la forme $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \geq \cdots$, où chaque valeur propre apparaît un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note par $\mathcal{V}_p$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension p . Le but de ce problème est de montrer les formules suivantes :

$$\mu_n \;=\; \min_{W \in \mathcal{V}_n} \max_{x \in W^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \mu_n \;=\; \max_{W \in \mathcal{V}_{n+1}} \min_{x \in W \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \; . \qquad (1)$$

Soit $(f_n)_n$ une base hilbertienne de $\overline{\mathrm{Im} T}$ telle que $Tf_n = \mu_n f_n$, pour tout n .
1). Montrer que, si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de la boule unité de E , alors il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ et un élément x de cette boule tels que $x_{\phi(n)} \rightharpoonup x$ (i.e. pour tout $y \in E$, $\langle x_{\phi(n)}, y\rangle \to \langle x, y\rangle$).
2). Montrer que, si F est un sous-espace fermé de E, non réduit à $\{0\}$, alors il existe $x \in F$ de norme 1 tel que

$$\langle Tx, x\rangle \;=\; \sup_{y \in F, \|y\|=1} \langle Ty, y\rangle$$

(en particulier, dans la première égalité de (1), le max est bien atteint).
3). Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$Tx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, f_n\rangle f_n \; .$$

4). Soit W_n l'e.v. engendré par $f_0, \cdots, f_{n-1}$ (avec $W_0 = \{0\}$). Montrer que

$$\max_{x \in W_n^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \;=\; \mu_n$$

(on pourra considérer la restriction de T à $W_n^\perp$).
5). Soit $W \in \mathcal{V}_n$. Montrer que $W^\perp \cap W_{n+1} \neq \{0\}$ et que, pour tout $x \in W_{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \;\geq\; \mu_n \; .$$

Déduire de ce qui précède la première égalité de (1) (on vérifiera en particulier que le min est atteint sur W_n).
6). Soit $W \in \mathcal{V}_{n+1}$. Montrer que $W^\perp \cap W_{n+1} \neq \{0\}$ et qu'il existe $x \in W \setminus \{0\}$ tel que

$$\frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \ \leq \ \mu_n \ .$$

Prouver la seconde égalité de (1) (on vérifiera que le max est atteint sur W_{n+1}).
7). *Application.* Soit S, T deux opérateurs compacts auto-adjoints positifs sur E tel que $S \leq T$. Montrer que, pour tout n, $\mu_n(S) \leq \mu_n(T)$.

Travaux dirigés 7. Exercices ANAF, 2001/2002.

TOPOLOGIES FAIBLES.

Exercice 106. : Soit E un e.v.n de dimension infinie.
1). Prouver que la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E ne concide jamais avec la topologie forte (montrer que tout ouvert pour la topologie faible contient une droite !).
2). Soit $S = \{x : x \in E, \|x\| = 1\}$. Prouver que $\overline{S}^{\sigma(E,E')}$ (l'adhérence de S vis-à-vis de la topologie $\sigma(E, E')$) concide avec la boule $\overline{B} = \{x : x \in E, \|x\| \leq 1\}$.
3). Montrer que l'intérieur de la boule unité $B = \{x : x \in E, \|x\| < 1\}$, pour la topologie $\sigma(E, E')$, est vide.
4). Montrer que toute partie compacte de E pour la topologie forte est également compacte pour la topologie faible.
5). Prouver que l'ensemble P_K, défini dans l'exercice 57 (T.D. 3) est faiblement fermé (ie. fermé pour $\sigma(E', E)$).

Exercice 107. : Soit $(x_n)_n$ une suite convergeant faiblement dans un e.v.n. Prouver que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ converge faiblement dans E.

Exercice 108. : Soit H un espace de Hilbert.
1). Montrer qu'une suite $(x_n)_n$ de vecteurs de H converge fortement vers x si, et seulement si, elle converge faiblement vers x et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
2). Soit $(x_n)_n$ un système orthogonal de vecteurs de H. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i) $\sum x_n$ converge fortement ;
ii) $\sum x_n$ converge faiblement ;
iii) $\sum \|x_n\|^2 < +\infty$.

Exercice 109. : Soit E un espace de Banach, et soit $K = \{e' : e' \in E', \|e'\| \leq 1\}$ muni de la topologie induite par la topologie faible $*$, $\sigma(E', E)$. Montrer qu'il existe une injection isométrique de E dans $\mathcal{C}(K)$, où $\mathcal{C}(K)$ est l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, muni de sa norme usuelle : $\|\phi\| = \sup_{e'\in K} |\phi(e')|$, $\phi \in \mathcal{C}(K)$.

Exercice 110. : Soient E, F deux espaces de Banach. Pour simplifier, on note ces espaces E_w et F_w quand ils sont munis de leur topologie faible. Soit T une application linéaire de E dans F. **1).** Démontrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
i) $T : E \longrightarrow F$ est continue ;
ii) $T : E_w \longrightarrow F_w$ est continue ;
iii) $T : E \longrightarrow F_w$ est continue.
2). Démontrer que, si $T : E_w \longrightarrow F$ est continue, alors T est de rang fini. Donner une autre preuve de ce résultat quand E est réflexif.

Exercice 111. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note E_w l'espace vectoriel E muni de sa topologie faible $\sigma(E, E')$, puis E'_{w*} [resp. E'_w] l'espace vectoriel E' muni de la topologie $*$-faible [resp. muni de la topologie $\sigma(E', E'')$]. Enfin on appelle $(E_w)'$ le dual topologique de E_w, puis $(E'_{w*})'$ et $(E'_w)'$ ceux de E'_{w*} et E'_w. Montrer que

$$E' = (E_w)' \quad ; \quad E'' = (E'_w)' \quad ; \quad J(E) = (E'_{w*})',$$

où J est l'injection canonique de E dans E''.

Exercice 112. : Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. D'autre part on munit $[0,1]$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$.
1). Prouver que toute mesure positive bornée μ sur $([0,1], \mathcal{B})$ (ie. $\mu([0,1]) < +\infty$) définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$.
2). On admet que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$ s'écrit comme la différence de deux mesures positives bornées sur $([0,1], \mathcal{B})$.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}$. Prouver que $(f_n)_n$ converge faiblement vers f, avec $f \in \mathcal{C}$, si et seulement si elle est bornée dans $\mathcal{C}$ et si elle converge simplement vers f.

Exercice 113. : Soit H un espace de Hilbert séparable. On note $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormée quelconque de H, et $A = \{\sqrt{n} \cdot e_n, n \geq 1\}$.
1). Soit $V = \{x : x \in H, |\langle x, y_i\rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$, où ε est un nombre > 0 quelconque, et où les y_i sont des vecteurs de H. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} |\langle y_i, e_n\rangle| \right]^2 \ < \ +\infty,$$

et en déduire que 0 est dans la fermeture (faible) de l'ensemble A.
2). Démontrer que la topologie faible sur H n'est pas métrisable.

L'exercice précédent, ainsi que le suivant, montrent que la topologie faible ne peut être définie à l'aide des suites (en dimension infinie).

Exercice 114. : Théorème de Schur.
1). (théorème de Schur) Prouver que, dans l'espace usuel ℓ_1, la convergence forte des suites concide avec la convergence faible.
Indication. Un sens est évident, lequel? la réciproque est plus difficile : on pourra par exemple raisonner par l'absurde en considérant une suite qui converge faiblement dans ℓ_1 vers 0 et qui ne converge pas fortement.
2). Prouver que le résultat précédent ne s'étend pas aux espaces ℓ_p pour $p \in]1, +\infty]$ (prouver par exemple que la suite $(e^{(n)})_n$ converge faiblement vers 0 dans ℓ_p).

Exercice 115. : Soient E, F des espaces de Banach, et soit T une application linéaire continue de E dans F.
1). Prouver que, si T est compact, alors T transforme toute suite faiblement convergente dans E en une suite fortement convergente dans F.
Indication. 1ère méthode : on pourra se ramener en 0, puis considérer une suite $(x_n)_n$ qui converge faiblement dans E vers 0, et enfin démontrer que 0 est valeur d'adhérence, et la seule, de la suite $(Tx_n)_n$.
2ième méthode : démontrer que $K = \overline{T(B_E)}^{\sigma(E,E')} = \overline{T(B_E)}^{\|\cdot\|}$, puis que l'opérateur

identité est continu de $(K, \sigma(E, E'))$ dans $(K, \|\cdot\|)$.
2). Démontrer que la réciproque est vraie si l'on suppose que E est réflexif.
3). On suppose que E est réflexif. A l'aide du théorème de Schur (cf. exercice 114), démontrer que toute application linéaire continue de E dans ℓ_1 est compacte, et de même que toute application linéaire continue de c_0 dans E est compacte.

Exercice 116. : Soient E et F des espaces de Banach, et soit $T \in L(E, F)$ tel que T envoie toute suite fortement convergente en une suite faiblement convergente. Démontrer que T est continue (au sens des topologies fortes). Attention : ce résultat n'est pas une conséquence de l'exercice 110. Pourquoi ?

Exercice 117. : En considérant f_n définie par : $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ et $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, prouver que l'espace $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme n'est pas réflexif.

Problme 24. : Un exemple d'espace vectoriel topologique.
On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
1). Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $n+1$ fonctions (simples!), $\phi_0, \ldots, \phi_n \in \mathcal{C}$, vérifiant les conditions suivantes : $Supp(\phi_i) \subset [\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $\sum \phi_i \equiv 1$, $0 \leq \phi_i \leq 1$.
2). En déduire que toute fonction f de $\mathcal{C}$ est dans l'enveloppe convexe des $n+1$ fontions $\psi_i = (n+1)\phi_i f$.
3). Pour $\varepsilon > 0$ donné, on définit $V_\varepsilon = \{f : f \in \mathcal{C}, \int_0^1 |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx < \varepsilon\}$. Montrer que pour n assez grand les fonctions ψ_i sont dans V_ε.
4). On considère sur $\mathcal{C}$ la topologie admettant pour base de voisinages de 0 les ensembles V_ε, où ε parcourt $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que toute forme linéaire continue vis-à-vis de cette topologie est nulle sur $\mathcal{C}$.

Problme 25. :
1). Soit K un ensemble convexe fermé dans un espace de Banach réflexif E.
1a). Démontrer que, pour tout $x \in E$, il existe $a \in K$ tel que l'on ait

$$\|x - a\| \leq \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in K.$$

1b). Prouver que a est unique si E est strictement convexe (on dit qu'un espace est strictement convexe si, pour toute sphère S dans E, le segment ouvert joignant deux points distincts quelconques de S est contenu dans la boule ouverte : $\mathbb{R}^2$ muni de la norme "du sup" est-il strictement convexe ?)
2). On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme.
2a). Montrer que

$$H = \left\{f : f \in \mathcal{C}, \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}f(0)\right\}$$

est un hyperplan fermé dans $\mathcal{C}$.
2b). Soit $\phi = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Prouver que, si $f \in \mathcal{C}$, non constante, et $\|f - \phi\| \leq \frac{1}{3}$, alors $f \notin H$.
3). Prouver que $d(\phi, H) = \frac{1}{3}$, et en déduire que la propriété de "projection" du 1) n'est pas satisfaite (ce qui prouve que le caractère réflexif dans la question 1) est essentiel).

Problme 26. : Autour du théorème de Mazur.
1). (Théorème de Mazur) Soit E un e.v.n, et soit $(x_n)_n$ une suite de vecteurs de E convergeant faiblement vers x. Prouver qu'il existe une suite de vecteurs $(y_n)_n$ convergeant fortement vers x, où chaque vecteur y_n est combinaison barycentrique de x_k.
2). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant simplement vers une fontion f continue et telles que $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$. Démontrer que f est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions s'écrivant chacune comme combinaison barycentrique de fonctions f_k. (on pourra utiliser l'exercice 7.).
3). [5] Soit H un espace de Hilbert, et soit $(x_n)_n$ une suite de vecteurs de H convergeant faiblement vers x. Prouver qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que les moyennes arithmétiques

$$\frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_k}}{k}$$

convergent fortement vers x quand $k \to +\infty$.
Indication. On pourra se ramener à $x = 0$ et choisir successivement les x_{n_k} en imposant des conditions sur la taille des produits scalaires de x_{n_k} avec les vecteurs $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$.

Travaux dirigés 8. Exercices ANAF, 2001/2002.

COMPLÉMENTS.

Exercice 118. : Exercice de l'examen du 21-01-00.
Soit J l'intervalle $[0;1]$ et k une fonction continue positive définie sur J^2 telle que, pour tout $x \in \mathrm{J}$, $\int_0^1 k(x,y)\,dy \;=\; 1$. On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur J, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x\in \mathrm{J}} |f(x)|$, pour $f \in \mathrm{E}$. Pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathrm{J}$, on pose

$$(Qf)(x) \;=\; \int_0^1 k(x,y)\, f(y)\, dy\,.$$

1.a) Montrer que Q est un opérateur continu de E .
1.b) Soit $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 sur J, calculer $Q\mathbb{1}$. Que vaut $\|Q\|$? Déterminer le rayon spectral $r(Q)$ de Q .
1.c) Montrer que Q est un opérateur compact.
2)a) Soit $f, g \in \mathrm{E}$ telles que $Q(f) = f$ et $f = (I - Q)g$ (I désignant l'opérateur identité sur E). Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nf = g - Q^n g$. Conclure que $f = 0$.
2)b) En déduire que $\mathrm{Ker}(I - Q) \cap \mathrm{Im}(I - Q) = \{0\}$.
3) On note $\mathrm{N} := \mathrm{Ker}(I - Q)$ et $\mathrm{F} := \mathrm{Im}(I - Q)$.
3.a) Pourquoi F est-il fermé ? Que dire de N ? Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{F}$ (somme directe topologique).
3.b) Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Q^k f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $f \in \mathrm{N}$ et $f \in \mathrm{F}$. Conclure qu'il existe un projecteur continu Π tel que, pour tout $f \in \mathrm{E}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Q^k f \;=\; \Pi f\,.$$

Exercice 119. : Premier exercice du contrôle continu du 26-11-99.
Soit $E = C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
I) Pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_t par $f_t(x) = f(x - t)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on pose $F_f = \{f_t; t \in \mathbb{R}\}$.
I)1) On suppose f uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
I)1)a) Montrer que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to t_0} \|f_t - f_{t_0}\|_\infty = 0$.
I)1)b) En déduire que l'ensemble $A_f := \{f_t; t \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans F_f .
I)2) On suppose l'existence d'une suite réelle $(t_n)_n$ telle que $D_f := \{f_{t_n}; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans F_f .
I)2)a) Pour $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \{t \in \mathbb{R}; \|f_t - f_{t_n}\|_\infty \le \epsilon\}$. Montrer qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$ tels que, pour $|h| \le \eta$, on ait $\|f_{s_0} - f_{s_0+h}\|_\infty \le 2\epsilon$.
I)2)b) En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
I)3) On suppose f est périodique. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et que

F_f est un compact de E .
II) On dit qu'une partie P de E est maigre si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieur vide.
II)1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
II)1)a) Montrer que l'application $U_{n,a} : f \mapsto n[f(a+1/n) - f(a)]$, définie de E dans $\mathbb{R}$, est linéaire continue. Calculer sa norme $\|U_{n,a}\|$.
II)1)b) En déduire que l'ensemble $E_a := \{f \in E; \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |U_{n,a}(f)| < \infty\}$ est maigre.
II)2) Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble E_D des fonctions f de E, dérivables en au moins un point de D, est maigre.

Exercice 120. : Second exercice du contrôle continu du 26-11-99.
Soit (X, d) un espace métrique compact et $E = C(X; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X dans E muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(Y, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et Y' son dual topologique. À une application $f : X \longrightarrow Y$, on associe l'application $\phi_f : Y' \longrightarrow E$ définie par $\phi_f(y') = y' \circ f$, pour tout $y' \in Y'$.
1) On suppose $f : X \longrightarrow Y$ continue.
1)a) Montrer que ϕ_f est bien définie et linéaire continue.
1)b) Calculer sa norme $\|\phi_f\|$.
1)c) Montrer que ϕ_f est un opérateur compact.
2) On suppose que Y est réflexif. Montrer que, pour toute application linéaire compacte $T \in \mathcal{L}(Y'; E)$, il existe une unique application continue $f : X \longrightarrow Y$ telle que $T = \phi_f$.

Problme 27. : Racine carrée et module.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et A un opérateur borné positif, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{H}, \ \langle Ax, x\rangle \ \geq \ 0 \, .$$

L'objet de ce problème est de construire un opérateur borné positif B vérifiant $B^2 = A$. À l'aide de cette racine carrée, on contruira ensuite, pour tout opérateur borné C, un opérateur "module de C", noté $|C|$, généralisant le module de nombre complexe. On rappelle (cf. exercice 94) que la norme d'un opérateur T auto-adjoint borné sur $\mathcal{H}$ est donnée par

$$\|T\| \ = \ \sup_{\|x\|=1} \|T\,x\| \ = \ \sup_{\|x\|=1} \left|\langle Tx, x\rangle\right| . \tag{2}$$

1) Montrer que A est auto-adjoint.
2) On suppose que $\|A\| \leq 1$.
2)a) Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sqrt{1-t}$ est développable en série entière $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ dans $]-1; 1[$.
2)b) En utilisant les signes des coefficients du développement précédent, montrer que cette série converge absolument sur $[-1; 1]$.
2)c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} c_n (I-A)^n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit B sa somme.
2)d) Montrer que B est positif, que $B^2 = A$ (on pourra utiliser le produit de Cauchy de séries) et que B commute avec tout opérateur qui commute avec A .
3) On ne suppose plus que $\|A\| \leq 1$. Construire B positif borné tel que $B^2 = A$.
4) Soit B_1 positif borné tel que $B_1^2 = A$.
4)a) Vérifier que B_1 commute avec A .

4)b) B étant l'opérateur construit au **3)**, en déduire que

$$(B - B_1)B(B - B_1) + (B - B_1)B_1(B - B_1) = (B^2 - B_1^2)(B - B_1) = 0 ,$$

que $(B - B_1)B(B - B_1) = 0$ et que $(B - B_1)^3 = 0$.
2)c) Conclure que $B_1 = B$ (en montrant que $\|B - B_1\| = 0$).
L'opérateur B construit au **3)** est noté $\sqrt{A}$ ou $A^{1/2}$.
5) Quelques propriétés de $A^{1/2}$.
5)a) Vérifier que, pour $\lambda \geq 0$, λA est positif et que $(\lambda A)^{1/2} = \sqrt{\lambda} A^{1/2}$.
5)b) Soit $(D_n)_n$ une suite d'opérateurs positifs bornés convergeant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers D . Vérifier que D est positif et que $(D_n^{1/2})_n$ converge vers $D^{1/2}$ (on pourra se ramener au cas où $\|D_n\| \leq 1$, pour tout n).
5)c) Montrer que, pour tout $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, C^*AC est positif. Pour U unitaire (U inversible et $U^* = U^{-1}$), montrer que $(U^*AU)^{1/2} = U^*A^{1/2}U$.
5)d) Soit $x \in \mathcal{H}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Vérifier que $\lambda \geq 0$ et que $A^{1/2}x = \sqrt{\lambda}\, x$.
6) Soit $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On va montrer que C s'écrit comme combinaison linéaire de quatres opérateurs unitaires.
6)a) Écrire C comme combinaison linéaire de deux opérateurs auto-adjoints.
6)b) Soit D un opérateur auto-adjoint borné avec $\|D\| \leq 1$. Montrer que les deux opérateurs $D \pm i\sqrt{I - D^2}$ sont bien définis et unitaires.
6)c) Écrire C comme combinaison linéaire de quatres opérateurs unitaires.
7) On définit le module de $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $|C| = (C^*C)^{1/2}$.
7)a) Vérifier que le module est bien défini dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que $\|\,|C|\,\| = \|C\|$, que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda C| = |\lambda|\,|C|$, et que $\mathrm{Ker}|C| = \mathrm{Ker} C$. Vérifier que, pour A positif, $|A| = A$.
7)b) Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$. Montrer que $|UC| = |C|$ et que $|CU| = U^*|C|U$.
7)c) Soit $(C_n)_n$ une suite d'opérateurs bornés convergeant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers C . Montrer que $(|C_n|)_n$ converge vers $|C|$.
7)d) En utilisant l'opérateur $T(z) = \langle z, x\rangle y$, pour $x, y \in \mathcal{H}$ bien choisis, montrer qu'en général $C^*C \neq CC^*$ et $|C^*| \neq |C|$.

Exercice 121. : Exemples de racine carrée.
1) Soit A une matrice n-n hermitienne positive. En utilisant sa diagonalisation, déterminer explicitement $A^{1/2}$.
2) Soit C un opérateur compact sur un espace de Hilbert complexe, séparable. En utilisant la forme canonique de C, déterminer $|C|$.

Quelques notions nécessaires pour les problèmes 28 et 29.
Isométries partielles : Un opérateur U sur $\mathcal{H}$ est une isométrie partielle si, pour tout $x \in (\mathrm{Ker} U)^\perp$, $\|Ux\| = \|x\|$. $(\mathrm{Ker} U)^\perp$ et $\mathrm{Im} U$ sont respectivement les espaces initial et final de U . Si $(\mathrm{Ker} U)^\perp = \mathcal{H}$, on parle d'isométrie (tout court) et un opérateur unitaire est une isométrie surjective. On a les propriétes suivantes.
U est une isométrie partielle dans $\mathcal{H}$ si et seulement si, pout tout $x, y \in (\mathrm{Ker} U)^\perp$, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.
L'image d'une isométrie partielle est fermée.
Si U est une isométrie partielle, alors U^* est aussi une isométrie partielle d'espace initial

ImU et d'espace final $(\mathrm{Ker}U)^\perp$ et la restriction de U^* à ImU est l'inverse de la restriction de U à $(\mathrm{Ker}U)^\perp$.
U isométrie partielle ssi U^*U et UU^* sont les projections orthogonales sur les espaces initial et final de U .
Décomposition polaire d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$:
Soit A un opérateur borné. Il existe une unique isométrie partielle U telle que

$$A \;=\; U\,|A| \;\text{ et }\; \mathrm{Ker}U \;=\; \mathrm{Ker}A\,.$$

C'est la décomposition polaire de A généralisant la forme polaire des nombres complexes.
On a les propriétés suivantes.
U est une isométrie surjective de $\overline{\mathrm{Im}|A|}$ sur $\overline{\mathrm{Im}A}$.
Si $A = U|A|$ et $A^* = V|A^*|$ sont les décompositions polaires de A et A^* respectivement alors $|A^*| = V^*|A|U^*$.

Problme 28. : Opérateurs de classe trace et dualité.
Dans ce problème, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, séparable. On choisit une base hilbertienne $b = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. On se propose de construire une classe d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ et d'en étudier des propriétés de dualité.
I. Opérateurs à trace.
I.1) Pour tout opérateur continu positif A, on pose

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{b}}(A) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}\langle Ae_n, e_n\rangle \;\in\; \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\,.$$

I.1)a) Soit $b' = (e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne de $\mathcal{H}$, montrer que $\mathrm{tr}_{\mathrm{b'}}(A) = \mathrm{tr}_{\mathrm{b}}(A)$ (utiliser $A^{1/2}$). On note la valeur commune $\mathrm{tr}(A)$.
I.1)b) Vérifier que, pour $\lambda \geq 0$ et B opérateur borné positif, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B) &\;=\; \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)\,,\\ \mathrm{tr}(\lambda A) &\;=\; \lambda\,\mathrm{tr}(A)\,,\\ 0\leq A\leq B &\;\Longrightarrow\; 0\leq \mathrm{tr}(A)\leq \mathrm{tr}(B)\,. \end{aligned}$$

I.1)c) Montrer que, si U est unitaire sur $\mathcal{H}$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|A^{1/2}Ue_n\|^2 \;=\; \mathrm{tr}(U^*AU) \;=\; \mathrm{tr}(A)\,.$$

I.1)d) Soit U une isométrie partielle de $\mathcal{H}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|A^{1/2}Ue_n\|^2 \;=\; \mathrm{tr}(U^*AU) \;\leq\; \mathrm{tr}(A)\,.$$

I.2) Soit $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) := \{A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\,;\,\mathrm{tr}(|A|) < +\infty\}$, l'ensemble des opérateurs à trace.
I.2)a) Montrer que les opérateurs de rang fini sont à trace.
I.2)b) Soit $x, y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ et $T : \mathcal{H}\ni z \mapsto \langle z, x\rangle y$. Déterminer $\mathrm{tr}(|T|)$.
I.2)c) Montrer que $\lambda\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

I.2)d) Soit $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Montrer, en utilisant les décompositions polaires de A^* et de A, que $A^* \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et que $\operatorname{tr}(|A^*|) \leq \operatorname{tr}(|A|)$. En déduire que $\operatorname{tr}(|A^*|) = \operatorname{tr}(|A|)$.
I.2)e) Soit $A, B \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. En utilisant les décompositions polaires de A, B et $A+B$, montrer que

$$\operatorname{tr}(|A+B|) \ \leq \ \operatorname{tr}(|A|) + \operatorname{tr}(|B|) \ < \ +\infty \, .$$

I.2)f) Pour $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, vérifier que AB et BA appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ (on pourra se ramener au cas où B est unitaire). En utilisant des décompositions polaires, **I.2)d)** et le **1)a)** du problème 29, montrer que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(|AB|) &\leq \|B\| \operatorname{tr}(|A|) \, , \\ \operatorname{tr}(|BA|) &\leq \|B\| \operatorname{tr}(|A|) \, . \end{aligned}$$

I.3) $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, stable par passage à l'adjoint, et un idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pour $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, on pose

$$\|A\|_1 \ := \ \operatorname{tr}(|A|) \, .$$

I.3)a) Vérifier que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.
I.3)b) Soit $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| = 1$ et $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Montrer que

$$\| \, |A|^{1/2} x \|^2 \ \leq \ \operatorname{tr}(|A|) \, .$$

En déduire que $\|A\| \leq \|A\|_1$.
I.3)c) Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_1$.
I.4) Soit $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.
I.4)a) Pourquoi $\operatorname{tr}(|A|^2) < +\infty$?
I.4)b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp$ avec $\|x\| = 1$. Montrer que

$$\|Ax\|^2 \ \leq \ \operatorname{tr}(|A|^2) - \sum_{k=0}^{n} \|Ae_k\|^2 \, .$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_n$ définie par

$$\alpha_n \ := \ \sup\{\|Ax\| \, ; \, x \in \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp, \, \|x\| = 1\}$$

tend vers 0 .
I.4)c) Soit A_n l'opérateur défini par, pour $z \in \mathcal{H}$,

$$A_n z \ := \ \sum_{k=0}^{n} \langle z, e_n \rangle A e_n \, .$$

Vérifier que $(A_n z)_n$ tend vers Az, pour tout z . En utilisant la projection orthogonale sur $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp$, montrer que $(A - A_n)_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que A est compact.
I.4)d) Soit C un opérateur compact et $(\lambda_n)_n$ la suite de ses valeurs singulières (i.e. les racines carrées des valeurs propres de C^*C). Montrer que $C \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ si et seulement si la série $\sum_n \lambda_n$ converge.
I.4)e) Montrer que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour $\| \cdot \|_1$.

II. Trace d'opérateurs à trace.
Pour $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, on définit la trace de A par

$$\operatorname{tr}(A) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle\,.$$

II.1) En écrivant $A = U|A|$ pour U convenable, montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\langle Ae_n, e_n\rangle$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$. La trace de A est donc bien définie. Pourquoi sa somme est-elle indépendante de la base choisie ?
II.2) Prouver que $\operatorname{tr} : \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, vérifiant $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$.
II.3) Pour $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, vérifier que $\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB)$.
III. Dualité.
Dans cette partie, on se propose de montrer que

$$\Big(\mathcal{L}^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1\Big) \;\cong\; \mathcal{K}(\mathcal{H})' \qquad \text{et} \qquad \Big(\mathcal{L}^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1\Big)' \;\cong\; \mathcal{L}(\mathcal{H})\,,$$

où $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ désigne l'idéal des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$.
III.1) Soit $f \in \mathcal{K}(\mathcal{H})'$. Construire un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on ait $f(T_{y,x}) = \langle Ax, y\rangle$, où $T_{y,x}$ est l'opérateur défini par $T_{y,x}z = \langle z, y\rangle x$ pour $z \in \mathcal{H}$ (on justifiera l'existence de $f(T_{y,x})$). L'opérateur A est-il unique ?
III.2) Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A.
III.2)a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\langle |A|e_n, e_n\rangle \;=\; f\Big(\sum_{k=0}^{n} T_{Ue_n,e_n}\Big)$$

III.2)b) En déduire que $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et que $\|A\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'}$.
III.3) A étant toujours l'opérateur construit au **III.1)**, montrer que $C \mapsto \operatorname{tr}(CA)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, égale à f. Vérifier que $\|A\|_1 = \|f\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})'}$.
III.4) Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})'$ ($\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ étant muni de la norme $\|\cdot\|_1$). Construire un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on ait $g(T_{y,x}) = \langle Bx, y\rangle$ ($T_{y,x}$ est défini au **III.1)**).
III.5) Montrer que $A \mapsto \operatorname{tr}(BA)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, égale à g. Prouver que $\|B\| = \|g\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H})'}$.

Exercice 122. : Exemple d'opérateur à trace.
Soit $T : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ défini par $(Tu)_n = (2i)^{-n}u_n$, pour $(u_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$. Déterminer $|T|$, $\operatorname{tr}|T|$ et $\operatorname{tr}T$.

Problme 29. : Opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $b = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Hilbert-Schmidt si la série $\sum_{n\geq 0}\|Te_n\|^2$ est convergente. On note par $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt et on pose

$$\|T\|_2^2 \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}\|Te_n\|^2\,.$$

1) $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel normé et un idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, stable par passage à l'adjoint.
1)a) Soit $(e_n)_n$, $(f_n)_n$ deux bases hilbertiennes de $\mathcal{H}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que les séries

$$\sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \|T^* f_n\|^2$$

ont même nature et, en cas de convergence, la même somme. Même chose pour

$$\sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \|Tf_n\|^2 .$$

On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_n$ de $\mathcal{H}$.
Montrer que $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
1)b) Montrer que, pour $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ et que $\|\lambda A\|_2 = |\lambda| \, \|A\|_2$.
1)c) Soit $A, B \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(A+B)e_n\|^2 \ \leq \ \Big(\|A\|_2 + \|B\|_2\Big)^2 .$$

En déduire que $A + B \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ et $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$.
1)d) Soit $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que AB et BA appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ (on se ramènera au cas où B est unitaire).
1)e) Soit $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$. En utilisant les décompositions polaires de A et A^*, vérifier que $A^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$. A-t-on $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$?
1)f) Vérifier que $\|A\|_2 = 0$ implique $A = 0$.
2) $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle A, B\rangle_2 \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \langle B^* A e_n, e_n\rangle .$$

2)a) Vérifier que la série définissant $\langle A, B\rangle_2$ est absolument convergente et que sa somme ne dépend pas de la base hilbertienne choisie.
2)b) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est bien un produit scalaire.
2)c) Pour $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$, montrer que $\|A\| \leq \|A\|_2$.
2)d) En déduire que $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ est complet pour $\| \cdot \|_2$.
3) Soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'idéal des opérateurs compact sur $\mathcal{H}$. Soit $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$.
3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp$ avec $\|x\| = 1$. Montrer que

$$\|Ax\|^2 \ \leq \ \|A\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \|Ae_k\|^2 .$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_n$ définie par

$$\alpha_n \ := \ \sup\{\|Ax\| \, ; \, x \in \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp, \ \|x\| = 1\}$$

tend vers 0.
3)b) Soit A_n l'opérateur défini par, pour $z \in \mathcal{H}$,

$$A_n z \ := \ \sum_{k=0}^{n} \langle z, e_n\rangle A e_n .$$

Vérifier que $(A_n z)_n$ tend vers Az, pour tout z. En utilisant la projection orthogonale sur $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}^\perp$, montrer que $(A - A_n)_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que A est compact.
3)c) Soit $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $(\lambda_n)_n$ la suite de ses valeurs singulières. Montrer que C appartient à $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ si et seulement si $\sum_n \lambda_n^2$ converge.
3)d) Montrer que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ pour $\| \cdot \|_2$.
4) Lien avec les opérateurs à trace.
4)a) Soit $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Vérifier que $A \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ et que $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$.
4)b) Montrer que $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ équivaut à $|A|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$.
4)c) En déduire que $A \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ s'écrit BC avec $B, C \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ (utiliser la décomposition polaire de A).
4)d) Montrer que $BC \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ si $B, C \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$.

References

[1] Brezis H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*
Masson.

[2] Gonnord S., Tosel N. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.*
Ellipses.

[3] H. Queffélec, C. Zuily. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.*
Masson.

[4] M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, Tome I: Functional Analysis.*

[5] F. Riesz, B. Sz. Nagy. *Leons d'analyse fonctionnelle.*
Gauthier-Villars

[6] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.*
Masson.

[7] W. Rudin. *Functional Analysis.*
McGraw-Hill.

[8] C. Tisseron. *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels.*
Hermann.