

Préliminaires et rappels.

Exercice 1. : Soit E, F et G des ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose f injective. Montrer que l'application $\tilde{f} : E \rightarrow f(E)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est bijective.

Remarque : En particulier, la composition de deux bijections est une bijection.

Exercice 2. : Soit A, B et C des parties d'un ensemble E . Montrer les propriétés

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, & A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), & A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ E \setminus (A \cup B) &= (E \setminus A) \cap (E \setminus B), & E \setminus (A \cap B) &= (E \setminus A) \cup (E \setminus B). \end{aligned}$$

Exercice 3. : Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$. Soit A et B des parties de E ou de F .

1. Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), & f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), & f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

2. Montrer que, si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Donner un choix de f, A et B tel que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Remarque : Les images réciproques d'ensemble ont des propriétés plus simples que les images directes.

Exercice 4. : Soit I et E deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par I . On définit les sous-ensembles suivants de E :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E; \exists i \in I; x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Dans le cas $E = \mathbb{R}$, donner une expression simple des ensembles suivants :

1.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{R}$ et $A_i = [0; 1]$, pour tout $i \in \mathbb{R}$;

2.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [-i^{-1}; i^{-1}]$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

3.

$$\bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [i; +\infty[$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

4.

$$\bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{Q}^*$ et $A_i = [\sqrt{2} - i^{-1}; \sqrt{2} + i^{-1}] \cap \mathbb{Q}$, pour tout $i \in \mathbb{Q}^*$. (On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

5.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{N}$ et $A_i = [(-1)^i i; +\infty[$, pour tout $i \in \mathbb{N}$;

6.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i,$$

pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq (-1)^i x < 1/i\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. : On utilise l'exercice 4. Soit I et J deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux familles de parties d'un ensemble E , indexées par I et J , respectivement. Soit C une partie de E .

1. Montrer que

$$E \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i), \quad E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus A_i).$$

2. Montrer que

$$C \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (C \cup A_i), \quad C \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C \cap A_i).$$

3. Montrer que

$$C \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i), \quad C \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C \cup A_i).$$

4. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} (A_i \cup B_j)\right) = \bigcup_{(i;j) \in I \times J} (A_i \cup B_j),$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cap B_j)\right) = \bigcap_{(i;j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

5. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)\right) = \bigcup_{(i;j) \in I \times J} (A_i \cap B_j),$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)\right) = \bigcap_{(i;j) \in I \times J} (A_i \cup B_j).$$

6. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cap B_j)\right) = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j)\right),$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)\right) = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_j)\right).$$

Exercice 6. : Soit A un ensemble non vide. On dit qu'il est au plus dénombrable s'il existe une injection $j : A \rightarrow \mathbb{N}$. On dit qu'il est dénombrable s'il existe une bijection $j : A \rightarrow \mathbb{N}$. On dit qu'il est fini s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $j : A \rightarrow \llbracket 1; p \rrbracket$ (avec $\llbracket 1; p \rrbracket := [1; p] \cap \mathbb{N}$). On dit qu'il est infini s'il n'est pas fini.

On pourra utiliser l'exercice 1.

1. Montrer que l'application $j_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_1(-n) = 2n + 1$, $j_1(n) = 2n$ et $j_1(0) = 0$, est bijective. \mathbb{Z} est donc dénombrable.
2. Montrer que l'application $j_2 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_2(n) = n - 1$, est bijective. \mathbb{N}^* est donc dénombrable.
3. Montrer que l'image par une application injective d'un ensemble infini est infinie.
4. Montre qu'un ensemble qui contient une partie infinie est infini.
5. Soit D une partie infinie de \mathbb{N} . Montrer que D est dénombrable. (Indication : on pourra énumérer les éléments de D dans l'ordre croissant.)
6. Montrer qu'une partie d'un ensemble au plus dénombrable est aussi au plus dénombrable.
7. Montrer qu'un ensemble A est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.
8. Construire une application bijective $j_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

9. Construire une application bijective $j_4 : \mathbb{Q} \longrightarrow F$, où

$$F = \{(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; p/q \text{ est irréductible}\}.$$

Vérifier que F est un ensemble infini.

10. Dans cette question, on montre que \mathbb{N}^2 est dénombrable. Pour $s \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble fini $D_s = \{(n; m) \in \mathbb{N}^2; n + m = s\}$ que l'on ordonne dans l'ordre croissant des ordonnées : $D_s = \{a_0(s); a_1(s); \dots; a_s(s)\}$.

a). Déterminer et représenter graphiquement les ensembles D_0, D_1, D_2, D_3 et D_4 .

b). Vérifier que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est la réunion disjointe des ensembles D_s , pour $s \in \mathbb{N}$.

c). On construit par récurrence une application $j : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante.

On pose $j(0; 0) = 0$. Supposons construites les restrictions $j|_{D_s}$ de j à D_s , pour $s \leq N$, telles que, pour $1 \leq s \leq N$, pour $0 < p \leq s$,

$$j(a_0(s)) = j(a_{s-1}(s-1)) + 1 \quad \text{et} \quad j(a_p(s)) = j(a_{p-1}(s)) + 1.$$

Vérifier que cette propriété est héréditaire. L'application j est donc bien définie par le théorème de récurrence.

d). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in j(\mathbb{N}^2)$.

e). Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}$, $p \mapsto j(a_p(s))$ est strictement croissante. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\max(j(D_s)) < \min(j(D_{s+1}))$.

f). En déduire que j est bijective.

En particulier, \mathbb{N}^2 est dénombrable.

11. En déduire que \mathbb{Q} est dénombrable. (Indication : on pourra montrer que $j \circ j_3 \circ j_4(\mathbb{Q})$ est une partie infinie de \mathbb{N}).

12. Soit E un ensemble. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de parties de E au plus dénombrables.

a). Construire une application injective s de $\cup_{i \in I} B_i$ vers l'union disjointe des B_i qui est définie par

$$\bigsqcup_{i \in I} B_i := \{(i; x); i \in I \text{ et } x \in B_i\}.$$

b). Construire une application injective J de $\bigsqcup_{i \in I} B_i$ vers \mathbb{N}^2 .

c). En déduire que $\cup_{i \in I} B_i$ est au plus dénombrable.

13. Soit A et B deux ensembles (au plus) dénombrables. Montrer que le produit cartésien $A \times B$ est aussi (au plus) dénombrable.

14. Soit E un ensemble fini ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E sur $E \times E$.

Remarque : Si E a un seul élément, E est en bijection avec $E \times E$. En autorisant l'axiome du choix, on peut montrer que, si E un ensemble infini, il existe une bijection de E sur $E \times E$.

Exercice 7. : On montre dans cet exercice que l'intervalle $]0; 1[$ de \mathbb{R} est infini non dénombrable et donc aussi que \mathbb{R} est infini non dénombrable (cf. 6 de l'exercice 6).

Pour ce faire, on va utiliser le **procédé diagonal de Cantor**. Comme $]0; 1[$ contient l'ensemble infini $\{1/n; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, $]0; 1[$ est infini. On va montrer qu'il est non dénombrable. Dans l'optique d'une preuve par l'absurde, on suppose que $]0; 1[$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire le développement décimal de u_n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{nk}}{10^k},$$

où, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, les chiffres $v_{nk} \in [0; 9] \cap \mathbb{N}$.

On considère la suite de chiffres $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ (avec $c_k \in [0; 9] \cap \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) définie par $c_k = 4$ si $v_{kk} \neq 4$ et $c_k = 3$ si $v_{kk} = 4$. On considère le nombre réel

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}.$$

Vérifier que x n'est pas un décimal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq u_n$. En déduire une contradiction.

On a montré que $]0; 1[$ est non dénombrable.

Exercice 8. : Une partie non vide I de \mathbb{R} est un intervalle si la proposition suivante est vérifiée par la partie I :

$$\forall (x; y) \in I^2, \quad x < y \implies [x; y] \subset I. \quad (1)$$

Ici $[x; y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I . On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).

On va montrer que I est d'un des types suivants : $] \inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $] \inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Pour $(a; b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$, on définit $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$ et $[a; b]$

$$]a; b[:= \{x \in \mathbb{R}; a < x \text{ et } x < b\}, \quad]a; b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \text{ et } x \leq b\},$$

$$[a; b[:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \text{ et } x < b\}, \quad [a; b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \text{ et } x \leq b\}.$$

Vérifier que ce sont des intervalles (quand ils sont non vides).

2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition $(\inf I < x < \sup I)$ soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\inf I < x_0 < \sup I$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ avec $\inf I < x < \sup I$ alors il existe $(y; z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $] \inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $] \inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $] \inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.

Remarque : La proposition (1) est vrai pour $I = \emptyset$. Il est donc légitime de considérer l'ensemble vide comme un intervalle. De plus, notons que, pour tous $a < b$ dans \mathbb{R} , on peut écrire $\emptyset =]b; a[=]b; a[= [b; a[= [b; a[$.

Exercice 9. : On pourra utiliser les exercices 1, 6 et 7. Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} . On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $g :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$.
2. On suppose $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Trouver une bijection $h :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$.
3. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Trouver une bijection $k :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$.
4. Lorsque $a = b$, vérifier que I est un singleton. Il est donc fini.
5. On suppose que $a < b$ (I est infini cette fois). Montrer que I n'est pas dénombrable.

Remarque : On a montré que les intervalles de \mathbb{R} sont non dénombrables. Ils sont soit finis soit infinis non dénombrables.

Exercice 10. : Soit $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On étend la relation d'ordre sur \mathbb{R}^+ à $\overline{\mathbb{R}^+}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq +\infty$. Soit X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}^+}$. L'ensemble des majorants de X est non vide (il contient toujours $+\infty$) et a un plus petit élément, c'est la borne supérieure de X , notée $\sup X$. Elle appartient à $\overline{\mathbb{R}^+}$. Soit A et B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. On suppose que, pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ .
4. Soit $a \in A$ tel que, pour tout $a' \in A$, $a' \leq a$. Montrer qu'alors $a = \sup A$. (En particulier, a est le maximum de A .)
5. Soit c un majorant de A tel que, dans tout voisinage de c , il y a un élément de A . Montrer que $c = \sup A$.
6. Pour $\lambda \geq 0$, soit λA la partie de \mathbb{R}^+ définie par $\{\lambda a; a \in A\}$. Montrer que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ (avec les conventions $0 \cdot (+\infty) = 0$ et, pour $\lambda > 0$, $\lambda \cdot (+\infty) = +\infty$).
7. Soit $b \in \mathbb{R}^+$, $A \subset \mathbb{R}^+$ et $B = \{a + b; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = b + \sup A$ (avec la convention $b + (+\infty) = +\infty$).
8. Déterminer $\sup]0; 1]$, $\sup]0; 1[$, $\sup \mathbb{N}$, $\sup \{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup \{1 - n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 11. : Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On étend la relation d'ordre sur \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq x \leq +\infty$. Soit X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble des majorants de X est non vide et a un plus petit élément, c'est la borne supérieure de X , notée $\sup X$. Elle appartient à $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble des minorants de X est non vide et a un plus grand élément, c'est la borne inférieure de X , notée $\inf X$. Elle appartient à $\overline{\mathbb{R}}$. Soit

A et B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(-\infty; +\infty)\}$ l'addition de \mathbb{R} en posant $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, et, pour $a \in \mathbb{R}$, $(+\infty) + a = +\infty$ et $(-\infty) + a = -\infty$. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}^2$ la multiplication de \mathbb{R} en posant $0 \cdot (+\infty) = 0 = 0 \cdot (-\infty)$, $(-1) \cdot (+\infty) = -\infty$ et $(-1) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty = (-\infty) \cdot (-\infty)$ et, pour $\lambda > 0$, $\lambda \cdot (+\infty) = +\infty$ et $\lambda \cdot (-\infty) = -\infty$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. On suppose que, pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ .
4. Soit $a \in A$ tel que, pour tout $a' \in A$, $a' \leq a$. Montrer qu'alors $a = \sup A$. (En particulier, a est le maximum de A .)
5. Soit c un majorant de A tel que, dans tout voisinage de c , il y a un élément de A . Montrer que $c = \sup A$.
6. Pour $\lambda \geq 0$, soit λA la partie de $\overline{\mathbb{R}}$ définie par $\{\lambda a; a \in A\}$. Montrer que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ et $\inf \lambda A = \lambda \inf A$.
7. Soit $b \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{a + b; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = b + \sup A$. Montrer que $\inf B = b + \inf A$.
8. Pour $A \subset \mathbb{R}$, soit $B = \{-a; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = -\inf A$ et $\inf B = -\sup A$.
9. Calculer $\sup]-3; -2]$, $\sup]0; 1[$, $\sup \mathbb{Q}$, $\sup \{1 - 3n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup \{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 12. : Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de norme N_E et N_F respectivement ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit A une application linéaire de E dans F . Montrer dans $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ les égalités

$$\sup_{\substack{v \in E \\ N_E(v)=1}} N_F(A \cdot v) = \sup_{\substack{v \in E \\ N_E(v) \leq 1}} N_F(A \cdot v) = \sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{N_F(A \cdot v)}{N_E(v)}.$$

Remarque : Lorsque les “sup” précédents sont finis, il se trouve que A est une application continue. Réciproquement, si A est continue, alors on peut montrer que ces “sup” sont finis. Dans le cas où A est continue, la valeur commune des “sup” est un nombre réel positif appelé la norme d'opérateur de A , souvent notée $\|A\|$.

Exercice 13. : On rappelle qu'un ouvert de \mathbb{R} est, par définition, une réunion (quelconque) d'intervalles ouverts de \mathbb{R} . De même, pour $d \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$, un ouvert de \mathbb{R}^d est, par définition, une réunion (quelconque) de boules ouvertes de \mathbb{R}^d . Dans cet exercice, on montre les résultats suivants :

- Dans \mathbb{R} , tout ouvert s'écrit comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. On a même mieux : tout ouvert s'écrit comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

- Dans \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$, tout ouvert s'écrit comme réunion au plus dénombrable de boules ouvertes.

1. Soit V un ouvert de \mathbb{R} . On pose

$$\mathcal{I}_V = \{]a; b[; (a; b) \in \mathbb{Q}^2,]a; b[\subset V\}.$$

Montrer que \mathcal{I}_V est au plus dénombrable.

2. Montrer que

$$V = \bigcup_{J \in \mathcal{I}_V} J.$$

V est donc bien une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

3. On considère la relation \mathcal{R} définie sur \mathcal{I}_V par, pour $(J, J') \in \mathcal{I}_V^2$,

$$J \mathcal{R} J' \iff]\min(\inf J; \inf J'); \max(\sup J; \sup J')[\subset V.$$

Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

On note par $C_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{R} et, pour $J \in \mathcal{I}_V$, par $\mathcal{R}(J)$ la classe de J .

4. Vérifier que $C_{\mathcal{R}}$ est au plus dénombrable.
5. Montrer que, pour tout $C \in C_{\mathcal{R}}$, la réunion

$$I_C := \bigcup_{J \in C} J$$

est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenu dans V .

6. Montrer que, pour $(C; C') \in C_{\mathcal{R}}^2$ avec $C \neq C'$, $I_C \cap I_{C'} = \emptyset$.
7. Montrer que

$$V = \bigcup_{C \in C_{\mathcal{R}}} I_C.$$

V est donc bien une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

8. Soit V un ouvert de \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$. Montrer que V est la réunion au plus dénombrable de boules ouvertes. (Indication : on pourra considérer toutes les boules ouvertes de centre à coordonnées rationnelles et de rayon rationnel qui sont incluses dans V).

Exercice 14. : Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\overline{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$. On pose $\sup u = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\inf u = \inf\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Montrer que $\sup u \leq \sup v$ et $\inf u \leq \inf v$.

2. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\ell = \sup u$ si et seulement si ℓ majore u et s'il existe une suite de valeurs de u qui tend vers ℓ .
3. Soit $\lambda \geq 0$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\sup(\lambda u) = \lambda \sup u$.
4. Montrer que $\inf(-u) = -\sup u$.
5. Montrer que, si u est une suite croissante, $\lim u$ existe et vaut $\sup u$.
6. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $v_m = \sup\{u_n; n \geq m\}$ et $w_m = \inf\{u_n; n \geq m\}$. Montrer que v est décroissante et que w est croissante.

Exercice 15. : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que $\lim \inf(-u) = -\lim \sup u$ et $\lim \inf u \leq \lim \sup u$.
2. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $\ell = \lim \sup u$ alors il existe une sous-suite v de u telle que $\ell = \lim v$. Montrer que si $\ell = \lim \inf u$ alors il existe une sous-suite w de u telle que $\ell = \lim w$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Montrer que $\ell = \lim u$ si et seulement si $\lim \inf u = \lim \sup u = \ell$.
4. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\lim \sup \lambda u = \lambda \lim \sup u$.
5. Montrer que

$$\lim \sup(u + v) \leq \lim \sup u + \lim \sup v . \quad (2)$$

6. Donner un choix des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (2) soit stricte.
7. On suppose que u converge. Montrer qu'on a égalité dans (2).
8. Montrer que

$$\lim \inf u + \lim \sup v \leq \lim \sup(u + v) . \quad (3)$$

(Indication : on pourra extraire des sous-suites appropriées).

9. Donner un choix des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (3) soit stricte.
10. On suppose que les deux suites sont positives. Montrer que

$$(\lim \inf u) \cdot (\lim \sup v) \leq \lim \sup(u \cdot v) . \quad (4)$$

11. Donner un choix des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (4) soit stricte.
12. On suppose que u converge. Montrer qu'on a égalité dans (4).

Exercice 16. : Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a := \lim \inf u_n \in I$ et $b := \lim \sup u_n \in I$ (en particulier $-\infty < a \leq b < +\infty$). Montrer que

$$\lim \inf f(u_n) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim \sup f(u_n) = f(b) .$$

Application : déterminer $\lim \sup e^{3+2(-1)^n}$ et $\lim \inf e^{3+2(-1)^n}$.

Exercice 17. : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On définit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k. \quad (5)$$

Montrer que

$$\liminf u_n \leq \liminf v_n \leq \limsup v_n \leq \limsup u_n.$$

En choisissant $u_n = (-1)^{n+1}$, pour $n \geq 1$, vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge tandis que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 18. : Soit E un ensemble. On considère une famille de fonctions $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On définit deux nouvelles fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ par, pour $x \in E$, $(\liminf f_n)(x) = \limsup(f_n(x))$ et $(\limsup f_n)(x) = \liminf(f_n(x))$.

1. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante. Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont aussi croissantes.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction positive sur E . Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont aussi positives sur E .
3. Soit $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\liminf(f_n + g) = (\liminf f_n) + g$ et $\limsup(f_n + g) = (\limsup f_n) + g$.
4. Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^{+\ast} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\liminf(f_n g) = (\liminf f_n)g$ et $\limsup(f_n g) = (\limsup f_n)g$.

Exercice 19. : Soit X un ensemble et $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, où $\overline{\mathbb{R}^+}$ est défini dans l'exercice 10. On pose $\sup f = \sup\{f(x); x \in X\} \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ et $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ deux fonctions telles que, pour tout $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Montrer que $\sup f \leq \sup g$.
2. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que $\ell = \sup f$ si et seulement si ℓ majore f et s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .
3. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$.
4. Montrer que, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est croissante, $\lim_{+\infty} f$ existe et vaut $\sup f$.
5. Soit Y un ensemble. Soit $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que

$$\sup_{(x;y) \in X \times Y} f(x;y) = \sup_{x \in X} \left(\sup_{y \in Y} f(x;y) \right) = \sup_{y \in Y} \left(\sup_{x \in X} f(x;y) \right).$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que

$$\sup_{x \in X} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{x \in X} f_n(x) \right).$$

Exercice 20. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (a; b) \in I^2; \forall t \in [0; 1], f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b). \quad (6)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I$, pour tout $(m_1, \dots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m_i f(x_i). \quad (7)$$

Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in I$ et $(m_1, \dots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $m := \sum_{i=1}^n m_i > 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i f(x_i). \quad (8)$$

Exercice 21. : On rappelle que, pour $a > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on définit $a^\gamma = e^{\gamma \ln a}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1; \dots; a_n) \in]0; +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n a_k^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

(Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme et l'exercice 20.)

Remarque : On constate que l'inégalité précédente est encore vraie si les a_k sont positifs ou nuls en posant par convention que $0^{1/n} = 0$. Le membre de gauche de l'inégalité est appelé moyenne géométrique des nombres a_1, \dots, a_n . Le membre de droite est appelé moyenne arithmétique des nombres a_1, \dots, a_n . L'exercice montre donc que la moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.

Exercice 22. : Dans tout l'exercice, on considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Pour $t > 0$, soit $f_t :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ définie par $f_t(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_t(x) = x^t = e^{t \ln x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in]0; +\infty[^n$ et $(m_1, \dots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Soit $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f_{1/t}\left(\sum_{i=1}^n m_i f_t(x_i)\right).$$

1. Soit $t > 0$. Montrer que f_t est croissante. Montrer qu'elle est dérivable partout lorsque $t \geq 1$. Vérifier que, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $f_t(xy) = f_t(x)f_t(y)$.
On remarque que $f_t \circ f_{1/t} = f_{1/t} \circ f_t = id$, où $id :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ est l'application définie par $id(x) = x$.
On peut vérifier que f_t n'est pas dérivable en 0 lorsque $t < 1$.
2. Soit $t > 1$. Montrer que f_t est convexe.

3. Soit $t > 1$. En utilisant l'exercice 20, montrer que $g(t) \geq g(1)$.
4. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Soit

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q} > 0.$$

On choisit, pour tout $i \in \{1; \dots, n\}$, $m_i = \lambda^{-q} |b_i|^q > 0$ et $x_i = m_i^{-1/p} |a_i| \geq 0$. Vérifier que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Montrer (avec le 3) l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|a_i|) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}. \quad (9)$$

5. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. L'inégalité (10) ci-dessous est vraie si, pour tout $i \in \{1; \dots, n\}$, $b_i = 0$. On suppose que les b_i ne sont pas tous nuls. On note les termes non nuls b_{i_1}, \dots, b_{i_k} avec $k \geq 1$. En appliquant l'inégalité (9), avec n remplacé par k , à des k -uples appropriés, montrer l'inégalité de Hölder suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|a_i|) \right) \cdot f_{1/q} \left(\sum_{i=1}^n f_q(|b_i|) \right). \quad (10)$$

6. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Appliquer l'inégalité (10) avec les a_i remplacés par $|a_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. Appliquer cette même inégalité avec les a_i remplacés par les $|b_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|a_i + b_i|) \right) \leq f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|a_i|) \right) + f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|b_i|) \right). \quad (11)$$

7. Montrer que l'application $N_{n;p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $y = (y_1, \dots, y_n)$, par

$$N_{n;p}(y) = f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^n f_p(|y_i|) \right),$$

est une norme sur \mathbb{R}^n .

8. Soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_p(|a_i|) < +\infty.$$

Montrer que ℓ^p est un \mathbb{C} -espace vectoriel et que l'application $N_p : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_p(a) = f_{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_p(|a_i|) \right),$$

est une norme sur ℓ^p .

9. Montrer que l'inégalité de Hölder (10) est encore valable en remplaçant p par 1 et le facteur dépendant de q par

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |b_i|.$$

10. Montrer directement (sans passer par l'inégalité de Hölder comme au 6) que l'inégalité de Minkowski (11) est encore valable lorsque p est remplacé par 1.
11. En déduire que les applications $N_{n;1}, N_{n;\infty} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies, pour $y = (y_1, \dots, y_n)$, respectivement par

$$N_{n;1}(y) = \sum_{i=1}^n |y_i| \quad \text{et} \quad N_{n;\infty}(y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i|,$$

sont des normes sur \mathbb{R}^n .

12. Soit ℓ^1 l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty.$$

Montrer que ℓ^1 est un \mathbb{C} -espace vectoriel et que l'application $N_1 : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_1(a) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|,$$

est une norme sur ℓ^1 .

13. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| < +\infty.$$

Montrer que ℓ^∞ est un \mathbb{C} -espace vectoriel et que l'application $N_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_\infty(a) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|,$$

est une norme sur ℓ^∞ .

Remarque : Les espaces ℓ^p étudiés ici constituent un cas particulier des espaces \mathcal{L}^p qui seront introduits dans le cours et étudiés plus loin.

Exercice 23. : On pose $[1; +\infty] = [1; +\infty] \cup \{+\infty\}$ et on utilise la convention $1/\infty = 0$. On pourra utiliser les exercices 12 et 22.

Pour $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\delta_{n;k} = 1$ si $n = k$ et $\delta_{n;k} = 0$ sinon.

Soit $(p; q) \in [1; +\infty]^2$ tel que $(1/p) + (1/q) = 1$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite complexe $e^{(k)}$ par $e_n^{(k)} = \delta_{n;k}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{(k)} \in \ell^p$.

2. Soit $b \in \ell^q$. Montrer que l'application $B : \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$, donnée par

$$\ell^p \ni a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad (12)$$

est bien définie, linéaire et continue sur ℓ^p muni de la norme N_p . Vérifier que la norme $\|B\|$ de cette application linéaire B vaut $N_q(b)$.

3. Soit $p \in [1; +\infty[$ (ce qui impose $q \in]1; +\infty]$). Soit E une application linéaire continue de ℓ^p dans \mathbb{C} . On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \overline{E(e^{(k)})}$. On considère l'application B associée à $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par (12).

a). Vérifier que B est bien définie et linéaire sur l'espace vectoriel engendré par la famille des $e^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$, et qu'elle coïncide avec E sur cet espace.

b). Soit $a \in \ell^p$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \overline{b_n}$ converge et que sa somme vaut $E(a)$. En particulier, $B = E$ sur ℓ^p . (Indication : on pourra utiliser, pour $N \in \mathbb{N}$, la suite $a^{(N)}$ définie par $a_n^{(N)} = a_n$ si $n \leq N$ et $a_n^{(N)} = 0$ sinon.)

c). Soit $a \in \ell^p$. Soit a' la suite définie par $a'_n = |a_n| |b_n| (\overline{b_n})^{-1}$, si $b_n \neq 0$ et $a'_n = |a_n|$ si $b_n = 0$. Vérifier que $a' \in \ell^p$ et que $N_p(a') = N_p(a)$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq |E(a')|. \quad (13)$$

d). Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $b^{(N)}$ la suite définie par $b_n^{(N)} = b_n$ si $n \leq N$ et $b_n^{(N)} = 0$ sinon. Soit B_N l'application linéaire associée à $b^{(N)}$ par (12). Montrer que $\|B_N\| \leq \|E\|$. En déduire que $b \in \ell^q$ et $N_q(b) = \|E\|$.

Remarque : Le point 2 montre qu'il existe, dans tous les cas, une injection linéaire isométrique (donc continue) de ℓ^q dans le dual de ℓ^p , c'est-à-dire l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de ℓ^p dans \mathbb{C} . Le point 3 établit que cette application est bijective lorsque $p \in [1; +\infty[$ (et donc $q \in]1; +\infty]$). Il se trouve que ce n'est pas le cas lorsque $(p; q) = (+\infty; 1)$.