Somme de familles.

Conventions et notations : On pose $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On étend la relation d'ordre et les règles de calcul sur $\mathbb{R}^+$ à $\overline{\mathbb{R}^+}$ en décidant que $0 \cdot (+\infty) = 0$,

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ , \quad a \leq +\infty ,$$

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}^+} , \quad a + (+\infty) = +\infty ,$$
$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}^+} \setminus \{0\} , \quad a \cdot (+\infty) = +\infty .$$

Étant donné un ensemble non vide (d'indices) I, on note par $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies non vides de I. L'ensemble $\mathcal{F}(I)$ est non vide.

Définition : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ ou bien, de manière équivalente, soit $u : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application qui, à $i \in I$, associe $u(i) = u_i$. On définit la somme de cette famille par

$$\sum_{i\in I} u_i \ := \ \sup \left\{ \sum_{j\in J} u_j \, ; \, J \in \mathcal{F}(I) \right\} \ =: \ \sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \sum_{j\in J} u_j \ \in \overline{\mathbb{R}^+} .$$

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si sa somme est finie.

Remarques :
Lorsque I est un ensemble fini à n éléments, on peut écrire $I = \{i_1; \cdots ; i_n\}$. La notation $\sum_{i\in I} u_i$ représente deux choses : la somme finie

$$\sum_{k=1}^{n} u_{i_k} \quad \text{et} \quad \sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \sum_{j\in J} u_j .$$

Comme on va le vérifier, ces deux choses sont égales. Il n'y a donc pas de confusion.
Soit $I = D$, une partie infinie de $\mathbb{N}$. Dans ce cas, une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est aussi une suite $(u_n)_{n\in D}$. On identifie la série associée à la suite des sommes partielles de la série notée

$$\left(\sum_{n\in D}^{N} u_n \right)_{N\in\mathbb{N}} .$$

Comme les termes de la suite $(u_n)_{n\in D}$ sont positifs, la suite des sommes partielles de la série est croissante, elle a donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ que l'on note

$$\sum_{n\in D}^{\infty} u_n .$$

Comme on va le voir plus loin, cette dernière coïncide en fait avec la somme

$$\sum_{i \in I} u_i$$

de la famille $(u_i)_{i\in I}$. Le mot “somme” désigne, dans ce cas, à la fois la somme de la série et la somme de la famille sans confusion possible puisqu'elles sont égales.

Exercice 24. : Exemples de sommes.

1. Soit I un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille à termes dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. On peut donc écrire $I = \{i_1; \cdots; i_n\}$. Montrer que la somme finie $\sum_{k=1}^n u_{i_k}$ est le maximum de l'ensemble
$$\left\{ \sum_{j \in J} u_j \,;\, J \in \mathcal{F}(I) \right\}.$$
On a donc bien
$$\sum_{k=1}^{n} u_{i_k} \;=\; \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j \,;\, J \in \mathcal{F}(I) \right\}.$$
Par exemple, si $I = \{1; 4\}$ et, pour $i \in I$, $x_i = i$, la somme de la famille $x = (x_i)_{i\in I}$ est $1 + 4 = 5$.
2. Soit $I = [0; 1]$ et, pour $i \in I$, $w_i = i$. La famille $w = (w_i)_{i\in I}$ est-elle sommable ?
3. Soit $I = \mathbb{R}$ et $J = \{1; 4\}$. Soit $y = (y_i)_{i\in I}$ la famille définie par $y_i = i$ si $i \in J$ et $y_i = 0$ sinon. Quelle est la somme de la famille y ?
4. Soit $c \in \overline{\mathbb{R}^+}$, I un ensemble non vide quelconque et $z = (z_i)_{i\in I}$ la famille définie par $z_i = c$ si $i \in I$. Que vaut la somme de la famille z ?
5. Soit I un ensemble non vide quelconque et $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille à termes dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = +\infty$. Que vaut la somme de la famille ?
6. Soit $I = \mathbb{R}^+$ et, pour $i \in I$, $v_i = i$. La famille $v = (v_i)_{i\in I}$ est-elle sommable ?
7. Soit $I = \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $i \in I$, on pose $u_i = i^{-2}$ si $i \in \mathbb{N}^*$ et $u_i = 0$, sinon. La famille $u = (u_i)_{i\in I}$ est-elle sommable ?
8. Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $(u_i)_{i\in D}$ une famille à termes dans $\mathbb{R}^+$. C'est aussi une suite $(u_n)_{n\in D}$. La suite des sommes partielles $(\sum^N u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante donc tend vers un certain $S \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que
$$S \;=\; \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j \,;\, J \in \mathcal{F}(D) \right\}.$$

Exercice 25. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Soit I' un sous-ensemble non vide de I. Montrer que
$$\sum_{i \in I'} u_i \;\le\; \sum_{i \in I} u_i \,.$$

2. Soit $K = \{i \in I; u_i \neq 0\}$ et K' une partie de I contenant K. On suppose que K est non vide. Montrer que

$$\sum_{i\in I} u_i \;=\; \sum_{i\in K'} u_i \;=\; \sum_{i\in K} u_i \,.$$

3. On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable. En remarquant que

$$K \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{i \in I;\, u_i > n^{-1}\right\} ,$$

montrer que K est au plus dénombrable.

4. On suppose que K est dénombrable. Il existe donc une suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I deux à deux distincts telle que $K = \{i_k; k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que

$$\sum_{i\in I} u_i \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_{i_k} \,,$$

la somme (éventuellement infinie) de la série à termes positifs $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$.

5. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $s \in \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ telle que, pour toute $J \in \mathcal{F}(I)$ avec $J_\epsilon \subset J$,

$$s - \epsilon \;\leq\; \sum_{j\in J} u_j \;\leq\; s \,. \tag{14}$$

6. Soit $s \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $s_0 \in [0; s[$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que (14) soit fausse, pour toute $J \in \mathcal{F}(I)$.

7. Soit $s \in \mathbb{R}^+$. On suppose que la somme s_0 (éventuellement infinie) de $(u_i)_{i\in I}$ vérifie $s_0 > s$. Montrer qu'il existe $J_s \in \mathcal{F}(I)$ telle que (14) soit fausse, pour J remplacée par J_s et pour tout $\epsilon > 0$.

8. Soit $s \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable de somme s si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ telle que, pour toute $J \in \mathcal{F}(I)$ avec $J_\epsilon \subset J$, on ait (14).

Exercice 26. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. On suppose que, pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$. Montrer que

$$\sum_{i\in I} u_i \;\leq\; \sum_{i\in I} v_i \,.$$

2. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{i\in I} \lambda u_i \;=\; \lambda \cdot \left(\sum_{i\in I} u_i\right) .$$

3. Montrer que
$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) \leq \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i .$$
4. Soit $(J, J') \in \mathcal{F}(I)^2$. Vérifier que
$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J\cup J'} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in J'} v_i \leq \sum_{i\in J\cup J'} v_i .$$
5. En déduire que
$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i .$$

Exercice 27. : Soit I et J deux ensembles non vides et $(u_{ij})_{(i;j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$. On va démontrer le "petit" théorème de Fubini qui affirme que
$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{ij}\right) = \sum_{(i;j)\in I\times J} u_{ij} . \tag{15}$$

1. Montrer que la première égalité de (15) est vraie lorsque I est remplacée par une partie $I_f \in \mathcal{F}(I)$. (Indication : on pourra procéder par récurrence sur le cardinal de I_f).
   De même, on prouverait que la première égalité de (15) est vraie lorsque J est remplacée par une partie $J_f \in \mathcal{F}(J)$.
2. En déduire que
$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right) = \sup_{(I_f;J_f)\in\mathcal{F}(I)\times\mathcal{F}(J)} \sum_{(i;j)\in I_f\times J_f} u_{ij} . \tag{16}$$
3. Montrer la première égalité de (15).
4. Soit $F \in \mathcal{F}(I \times J)$. Montrer qu'il existe des $I_F \in \mathcal{F}(I)$ et $J_F \in \mathcal{F}(J)$ telles que $F \subset I_F \times J_F$.
5. En déduire la seconde égalité de (15).

Exercice 28. : Soit I un ensemble non vide. On considère une partition de $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: Λ est un ensemble non vide ; pour $\lambda \in \Lambda$, $I_\lambda \subset I$ (I_λ n'est pas forcément fini mais supposé non vide) ; si $\lambda \neq \lambda'$ dans Λ alors $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$; $I = \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer la formule dite de sommation par paquets suivante :
$$\sum_{i\in I} v_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} v_i\right) . \tag{17}$$

(Indication : on pourra utiliser l'exercice 27 avec $J = \Lambda$ et, pour $\lambda \in \Lambda$, $u_{i\lambda} = v_i$ si $i \in I_\lambda$ et $u_{i\lambda} = 0$ sinon.)

Conséquence : Soit I un ensemble non vide et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$. Soit I' une partie non vide et stricte de I. Montrer que

$$\sum_{i\in I} u_i \;=\; \left(\sum_{i\in I'} u_i\right) + \left(\sum_{i\in I\setminus I'} u_i\right). \tag{18}$$

Remarques :
La relation (18) est une sorte de relation de Chasles.
Ce résultat redonne le 1 de l'exercice 25 dans le cas où $I' \neq I$ car la somme sur $I \setminus I'$ est positive.
Par **convention**, on décide que la somme d'une famille à termes positifs indexée par un ensemble vide est nulle.
Dans ce cas, on voit que l'égalité (18) est valable si $I' = I$ et que le 1 de l'exercice 25 est valable lorsque $I' = \emptyset$. On voit aussi que le 2 de l'exercice 25 est encore si $K = \emptyset$ et le 4 de l'exercice 24 est encore valable si $I = \emptyset$.
Les résultats des exercices 26, 27 et 29 sont encore valables si I (et/ou J) est vide.
Enfin l'égalité est (17) est encore vraie si certains I_λ sont vides.

Exercice 29. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_{i;n})_{(i;n)\in I\times\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que, pour tout $i \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{i;n} \le u_{i;n+1}$. Comme, pour chaque $i \in I$, $(u_{i;n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ que l'on note par v_i.

1. Montrer que la limite suivante existe et que l'on a
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} u_{i;n} \;\le\; \sum_{i\in I} v_i\,.$$
2. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} u_{i;n} \;=\; \sum_{i\in I} v_i\,.$$
3. Déduire de ce qui précède que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} u_{i;n} \;=\; \sum_{i\in I} v_i \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I} u_{i;n} \;=\; \sum_{i\in I} \sup_{n\in\mathbb{N}} u_{i;n}\,.$$

Remarque : Le résultat de cet exercice ressemble au théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Lévi) du cours. On peut même montrer que c'en est un cas particulier.

Exercice 30. : Soit $b \in \mathbb{R}$ et $a = (a_{m;n})_{(m;n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de termes positifs définie par $a_{m;n} = (m + n\sqrt{2})^b$.

1. On suppose $b \ge 0$. Montrer que a n'est pas sommable.
2. On suppose $b < -2$. Montrer que a est sommable. (Indication : on pourra utiliser le fait que $m + n\sqrt{2} \ge 2^{1/4}\sqrt{mn}$ et les séries de Riemann.)

3. On supose $-1 \leq b < 0$. Montrer que a n'est pas sommable. (Indication : on pourra étudier à m fixé les sommes $\sum_n a_{m;n}$.)
4. On supose $-2 \leq b < -1$. Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(m + n\sqrt{2}\right)^b \;\geq\; \frac{\left(m + \sqrt{2}\right)^{b+1}}{-(b+1)\sqrt{2}} \,.$$

(Indication : on pourra comparer la somme avec une intégrale.) En déduire que a n'est pas sommable.

Exercice 31. : Soit $b \in \mathbb{R}$ et $c = (c_{m;n})_{(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de termes positifs définie par $c_{m;n} = (m+n)^b$. Pour quelle valeur de b la famille c est-elle sommable ?
(Indication : on pourra utiliser une sommation par paquets.)

Exercice 32. : Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, on définit sa longueur $\ell(I)$ par

$$\ell(I) \;=\; \big(\sup I\big) \;-\; \big(\inf I\big) \;\in \overline{\mathbb{R}^+} \,,$$

avec la convention $-(-\infty) = +\infty$. On admet que tout ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{O}}}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, où l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est au plus dénombrable (cf. exercice 13). On pose

$$L(\mathcal{O}) \;=\; \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{O}}} \ell\big(I_\lambda\big) \;\in\; \overline{\mathbb{R}^+} \,.$$

1. Trouver un ouvert non vide $\mathcal{O}$ tel que $L(\mathcal{O}) = +\infty$ et $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est un ensemble fini.
2. Trouver un ouvert non vide $\mathcal{O}$ tel que $L(\mathcal{O}) < +\infty$ et $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est un ensemble infini.
3. Soit $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Montrer qu'alors $L(\mathcal{O}) \leq L(\mathcal{O}')$.
4. Soit $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}$. En notant par $\overline{A}$ l'adhérence de A, on remarque que $\mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}$ et $\mathcal{O}' \setminus \overline{\mathcal{O}}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$L\big(\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'\big) \;=\; L\big(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'\big) \;+\; L\big(\mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}\big) \;+\; L\big(\mathcal{O}' \setminus \overline{\mathcal{O}}\big) \,.$$

5. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts non vides de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Montrer que

$$L\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} L\big(\mathcal{O}_n\big) \,.$$

Remarque : La fonction L définit une notion de longueur pour les ouverts de $\mathbb{R}$. Les propriétés de L établies dans cet exercice sont proches de celles d'une mesure.

Exercice 33. : Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant, appelé **produit de Cauchy de séries** : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. Alors la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} b_\ell \;=\; \sum_{\substack{(p;q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$$

est absolument convergente et on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \;=\; \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right)\cdot\left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right). \tag{19}$$

1. Soit $u = (u_{p;q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ la famille donnée par $u_{p;q} = |a_p|\cdot|b_q|$. Montrer que u est sommable et sa somme peut s'écrire :

$$\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p;q} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{(p;q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} |a_p b_q|\right). \tag{20}$$

2. En déduire que $\sum c_n$ converge absolument.
3. Soit $m\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{2m} c_n \;=\; \left(\sum_{p=0}^{m} a_p\right)\cdot\left(\sum_{q=0}^{m} b_q\right) + \lambda_m\,, \tag{21}$$

où

$$\lambda_m \;=\; \sum_{\substack{(p;q)\in([0;2m]\cap\mathbb{N})^2 \\ 2m\geq p+q>m\,,\ \max(p;q)>m}} a_p b_q\,.$$

4. Montrer que $\lim_{m\to\infty}|\lambda_m| = 0$.
5. En déduire l'égalité (19).

Remarque générale :
Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé $(E;\|\cdot\|)$, on dit qu'elle est sommable de somme $s\in E$ si, pour tout $\epsilon>0$, il existe $J_\epsilon\in\mathcal{F}(I)$ tel que, pour tout $J\in\mathcal{F}(I)$ avec $J_\epsilon\subset J$,

$$\left\|\sum_{j\in J} u_j - s\right\| \;\leq\; \epsilon\,.$$

Cela est similaire à la propriété du 4 de l'exercice 25. On peut étendre un bon nombre des propriétés précédentes aux familles sommables de vecteurs. Lorsque E est complet, on peut montrer que toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E absolument sommable, c'est-à-dire telle que $(\|u_i\|)_{i\in I}$ est sommable, est sommable. Pour plus d'information, on pourra consulter le livre de Claude Tisseron : Notions de Topologie, introduction aux espaces fonctionnels. Hermann.