Tribus.

Exercice 35. : Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Pour $E = \emptyset$, $E = \{a\}$, $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b, $E = \{a; b; c\}$ avec trois éléments distincts a, b et c, déterminer explicitement $\mathcal{P}(E)$.
2. Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
3. On note par 2^E l'ensemble des applications de E dans $\{0; 1\}$. Soit $\mathbb{1} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow 2^E$ définie, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, par $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0; 1\}$ avec $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction caractéristique de A. Montrer que $\mathbb{1}$ est bijective.
4. Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. Soit $D \in \mathcal{P}(E)$ défini par $D = \{x \in E; x \notin f(x)\}$. Montrer par l'absurde que $D \notin f(E)$.
5. En déduire qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Donner une injection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 36. : Soit E un ensemble. On considère la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ donnée par l'inclusion. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{A}$ est aussi un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$). On appelle élément maximal de $\mathcal{A}$ (pour l'inclusion) un élément M de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{A}\,, \quad \big(M \subset A \implies M = A\big)\,.$$

On appelle élément minimal de $\mathcal{A}$ (pour l'inclusion) un élément N de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{A}\,, \quad \big(A \subset N \implies N = A\big)\,.$$

La borne supérieure de $\mathcal{A}$, notée $\sup \mathcal{A}$, est le plus petit majorant de $\mathcal{A}$, s'il existe. La borne inférieure de $\mathcal{A}$, notée $\sup \mathcal{A}$, est le plus grand minorant de $\mathcal{A}$, s'il existe. Dans les deux cas, c'est un élément de $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire une partie de E.

1. Soit $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b. Trouver deux parties A et B de E qui sont incomparables pour l'inclusion, c'est-à-dire telles que $(A \subset B)$ est fausse et $(B \subset A)$ est aussi fausse.
2. Soit $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b. Soit $\mathcal{A} = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}\}$. Montrer que $\{a\}$ est un élément maximal de $\mathcal{A}$ et qu'il en est de même pour $\{b\}$.
3. Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]n^{-1}; 1 - n^{-1}[; n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ n'a pas d'élément maximal.
4. Pour E quelconque et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, montrer que $\mathcal{A}$ a toujours au moins un majorant.

5. Soit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$. Montrer que
$$S = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} M$$
est un élément minimal de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ n'en a pas d'autre.
$\mathcal{A}$ admet donc une borne supérieure, notée $\sup \mathcal{A}$. On montre de même que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure, notée $\inf \mathcal{A}$.
6. Vérifier que
$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} T \quad \text{et} \quad \inf \mathcal{A} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} T\,.$$
7. Pour $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]n^{-1}; 1 - n^{-1}[; n \in \mathbb{N}^*\}$, déterminer $\sup \mathcal{A}$ et $\inf \mathcal{A}$.

Exercice 37. : Soit E un ensemble et $\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On appelle limite inférieure de $\mathcal{A}$ l'ensemble
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \liminf \mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k\,.$$
On appelle limite supérieure de $\mathcal{A}$ l'ensemble
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \limsup \mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k\,.$$

1. Montrer que
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf \mathcal{A} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \limsup \mathcal{A} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\,.$$
2. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \liminf \mathcal{A}$ si et seulement si x appartient à tous les A_n sauf un nombre fini.
3. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \limsup \mathcal{A}$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n.
4. Montrer que $\liminf \mathcal{A} \subset \limsup \mathcal{A}$.
On a donc
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf \mathcal{A} \subset \limsup \mathcal{A} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\,.$$
5. Montrer que
$$E \setminus \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} E \setminus A_n \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} E \setminus A_n\,.$$
6. Pour $B \in \mathcal{P}(E)$, soit $\mathcal{Q}(B; \mathcal{A})$ la proposition :
$$\forall x \in B\,,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \big(n \geq N \implies x \in A_n\big)\,.$$
Soit $\mathcal{A}' = (E \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer l'équivalence
$$\big(\liminf \mathcal{A} = \limsup \mathcal{A}\big) \iff \big(\exists B \in \mathcal{P}(E)\,;\ \mathcal{Q}(B; \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(E \setminus B; \mathcal{A}')\big)\,.$$

7. Montrer que
$$\mathbb{1}_{\liminf \mathcal{A}} \;=\; \liminf \mathbb{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\limsup \mathcal{A}} \;=\; \limsup \mathbb{1}_{A_n}\;.$$
8. Soit $(F;G) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $\mathcal{A}$ la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E donnée par, pour $p \in \mathbb{N}$, $A_{2p} = F$ et $A_{2p+1} = G$. Déterminer $\liminf \mathcal{A}$ et $\limsup \mathcal{A}$.
9. Soit $\mathcal{A}$ la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n =]-\infty; a_n]$ où, pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 1 + (2p)^{-1}$ et $a_{2p+1} = -1 - (2p+1)^{-1}$. Déterminer $\liminf \mathcal{A}$ et $\limsup \mathcal{A}$.

Exercice 38. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.

1. Montrer que $\{\emptyset;\Omega\}$ est une tribu sur Ω.
2. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
3. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Montrer que $\{\emptyset;\Omega\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
4. Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux tribus sur Ω. Montrer que $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ est une tribu sur Ω.
5. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ ($\mathcal{A}$ est donc un ensemble de parties de Ω). Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des tribus $\mathcal{T}$ sur Ω telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Montrer que
$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcap_{\mathcal{T}\,\in\,\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathcal{T}$$
est une tribu sur Ω, qui contient $\mathcal{A}$. C'est bien sûr le minimum de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. On dit que c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
Remarque : La tribu engendrée par $\mathcal{P}(\Omega)$ est $\mathcal{P}(\Omega)$ et celle engendrée par le singleton $\{\emptyset\}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ est $\mathcal{T}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset;\Omega\}$. Cette dernière est aussi $\mathcal{T}(\{\Omega\})$, celle engendrée par le singleton $\{\Omega\}$. D'après 3, $\mathcal{T}(\{\emptyset\})$ (resp. $\mathcal{P}(\Omega)$) est la plus petite (resp. grande) tribu sur Ω.
6. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset;\Omega\}$ et $\mathcal{A} = \{A\}$. Vérifier que $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, est donnée par $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\emptyset; A; \Omega\setminus A; \Omega\}$.

Exercice 39. : Soit $\Omega = [0;1]$. Déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ pour $\mathcal{A} = \{[0;1/2]\}$, pour $\mathcal{A} = \{\{0\}\}$, pour $\mathcal{A} = \{\{0\};\{1\}\}$ et pour $\mathcal{A} = \{[0;1/2];\{1/3\}\}$.

Exercice 40. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. Soit $\mathcal{P}_d(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω qui sont au plus dénombrables. Soit $\mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega); \Omega\setminus A \in \mathcal{P}_d(\Omega)\}$ l'ensemble des complémentaires de parties au plus dénombrables. Soit $\mathcal{S}(\Omega) = \{\{x\}; x \in \Omega\}$ l'ensemble des singletons de Ω. On dit qu'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ (i.e. une famille non vide de parties de Ω) est une algèbre si $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et par passage au complémentaire (dans Ω).

1. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) := \mathcal{P}_d(\Omega) \cup \mathcal{P}_{cd}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
2. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\Omega))$. Montrer que la plus petite algèbre $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω qui sont finies ou dont le complémentaire est fini.

3. On suppose que Ω est infini. Montrer qu'il contient une partie dénombrable D telle que $\Omega \setminus D$ est infinie. En déduire que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_d(\Omega)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{T}_d(\Omega)$ et que $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu sur Ω.
4. Montrer que, si Ω est au plus dénombrable, alors $\mathcal{P}_d(\Omega) = \mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ donc $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$.
5. On suppose que $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) \neq \emptyset$. Montrer que Ω est au plus dénombrable.
6. En déduire l'équivalence : Ω est au plus dénombrable si et seulement si $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) \neq \emptyset$.
7. On suppose que Ω est infini non dénombrable. On **admet** qu'il existe deux parties disjointes et infinies non dénombrables dans Ω. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) \neq \mathcal{P}(\Omega)$.
8. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ si et seulement Ω est au plus dénombrable.
9. Vérifier que $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$ est strictement incluse dans la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. : Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu de Borel, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$). C'est aussi la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que les ensembles $]0;3[\cup]4;+\infty[$, $]0;7[\cap]1;9[$, $]0;1[\cup[2;3]$, $[0;1]\cup[2;3]$,
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[3+1/n;n] \quad \text{et} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{R}^*}\big]\,|x|-|x|^{-2};|x|+|x|^{-2}\big[$$
sont des boréliens de $\mathbb{R}$ (i.e. des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).
2. Montrer que les ensembles $\{(0;0)\}$, $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2; y>0\}$,
$$\big\{(x;y)\in\mathbb{R}^2; y>0\big\} \cup \big\{(0;y); y\leq 0\big\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\big\{(1/n;y); y\leq 0\big\}$$
sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$ (i.e. des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Exercice 42. : Soit X (resp. Y) un ensemble et $\mathcal{T}_X$ (resp. $\mathcal{T}_Y$) une tribu sur X (resp. Y). Soit $f : X \longrightarrow Y$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{T}_Y\}$ est une tribu sur X. On la note $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$. C'est l'image réciproque par f de la tribu $\mathcal{T}_Y$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X) = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur Y. Vérifier que $\mathcal{T}_X = f^{-1}(\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X))$. Voir aussi la remarque ci-dessous.
3. On suppose que f est constante égale à $y \in Y$. Montrer qu'alors $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) = \{\emptyset; X\}$ et que $\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X) = \mathcal{P}(Y)$.
4. Soit E une partie de Y. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_Y|E = \{B \cap E; B \in \mathcal{T}_Y\}$ est la tribu $j^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ sur E, pour l'application $j : E \longrightarrow Y$ donnée par $j(y) = y$. Montrer que $\mathcal{T}_Y|E$ contient $\mathcal{E}(E;\mathcal{T}_Y) = \{B \subset E; B \in \mathcal{T}_Y\}$. Montrer que, si $E \in \mathcal{T}_Y$, alors $\mathcal{E}(E;\mathcal{T}_Y) = \mathcal{T}_Y|E$ et $\mathcal{T}_Y|E \subset \mathcal{T}_Y$.

5. Soit A et E deux parties de Y telles que $A \not\subset E$, $E \not\subset A$, $(Y \setminus A) \not\subset E$ et $E \not\subset (Y \setminus A)$. Soit $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\{A\})$. Montrer que $E \notin \mathcal{T}_Y$, $\mathcal{E}(E; \mathcal{T}_Y) \neq \mathcal{T}_Y|E$ et $\mathcal{T}_Y|E \not\subset \mathcal{T}_Y$.
6. Montrer que $\mathcal{T} = \{A \times Y; A \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur $X \times Y$ et que $\mathcal{T} = j^{-1}(\mathcal{T}_X)$, pour $j : X \times Y \longrightarrow X$ donnée par $j(x; y) = x$.
7. Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{P}(Y)$. On va montrer que l'on a $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$, où $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{E}\}$.
   a). Montrer que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$ alors $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset f^{-1}(\mathcal{G})$.
   b). Montrer que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$. En déduire que $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$.
   c). On considère la tribu sur Y donnée par $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f; \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})))$. Montrer que $\mathcal{T}'$ contient $\mathcal{E}$. En déduire que $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$.
8. On suppose que $X = Y = \mathbb{R}$ et que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement monotone et surjective. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : En général, $f(\mathcal{T}_X) := \{f(A); A \in \mathcal{T}_X\}$ peut ne pas être une tribu sur Y. Par exemple, si f n'est pas surjective alors $Y \notin f(\mathcal{T}_X)$ donc $f(\mathcal{T}_X)$ n'est pas une tribu sur Y. Lorsque f est surjective mais pas injective, $f(\mathcal{T}_X)$ peut ne pas être une tribu sur Y. Voir un exemple dans l'exercice 43.

Exercice 43. : Soit $X = \{a; b; c; d\}$ un ensemble à quatre éléments deux à deux distincts. Soit $A = \{a; c\}$. Soit $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\{A\})$ la tribu sur X engendrée par la famille $\{A\}$ de parties de X. Soit $Y = \{0; 1; 2\}$ et $f : X \longrightarrow Y$ définie par $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) = 1$ et $f(d) = 2$. On remarque que f est surjective mais non injective.
Montrer que la famille de parties de X donnée par $f(\mathcal{T}_X) := \{f(B); B \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une tribu sur Y.

Exercice 44. : Topologie naturelle sur $\overline{\mathbb{R}}$. Tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$. On note par $\tau(\mathbb{R})$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (celle de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}; |\cdot|)$ où $|\cdot|$ désigne la fonction valeur absolue). On note par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. C'est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\tau(\mathbb{R})$.

1. Soit (X, τ) un espace topologigue et E une partie de X. Montrer que l'ensemble $\tau_E = \{A \cap E; A \in \tau\}$ est une topologie sur E. On l'appelle la topologie sur E induite par τ.
2. Soit $\tau(\overline{\mathbb{R}})$ la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ engendrée par l'ensemble suivant de parties de $\overline{\mathbb{R}}$:
$$\Big\{]a; b[;\ (a; b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ a \leq b\Big\} \cup \Big\{]a; +\infty];\ a \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{[-\infty; a[;\ a \in \mathbb{R}\Big\}\ .$$
   Montrer que $\tau(\mathbb{R})$ est la topologie sur $\mathbb{R}$ induite par $\tau(\overline{\mathbb{R}})$. Montrer que $\{-\infty\}$ et $\{+\infty\}$ sont des fermés de $\overline{\mathbb{R}}$. En déduire que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ (i.e. $\mathbb{R} \in \tau(\overline{\mathbb{R}})$).
3. La tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ est la tribu sur $\overline{\mathbb{R}}$ engendrée par $\tau(\overline{\mathbb{R}})$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est donnée par $f(x) = x$. (Indication : on pourra utiliser le 2 et l'exercice 42.)
4. Soit $A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$. On va montrer que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ si et seulement si $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   a). Pour $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, montrer que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Indication : on pourra utiliser 3.)

b). Soit $A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ tel que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ tel que $B \cap \mathbb{R} = A \cap \mathbb{R}$. En déduire que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, puis que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Exercice 45. : Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie non vide $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone sur Ω si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.

a). Si $(A; B) \in \mathcal{M}^2$ avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

b). Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} .$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone sur Ω. Montrer qu'une tribu sur Ω est une classe monotone sur Ω.
2. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone sur Ω. Vérifier que $\emptyset \in \mathcal{M}$. On considère $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$. Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M} .$$

(Indication : on pourra utiliser la suite $(B_0 \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Soit $(C_n)_{n\in D} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$, avec D fini ou dénombrable. Montrer que

$$\bigcup_{n\in D} C_n \in \mathcal{M} .$$

On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{M}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire. En déduire que $\mathcal{M}$ est une tribu.

3. Montrer qu'une intersection de classes monotones sur Ω est une classe monotone sur Ω.
Si $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, on note par $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la plus petite classe monotone sur Ω contenant $\mathcal{A}$. C'est l'intersection de toutes les classes monotones sur Ω contenant $\mathcal{A}$. D'après 1, on a donc $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{T}(A)$.
4. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose

$$\mathcal{M}_A = \left\{B \in \mathcal{P}(\Omega);\ A \cap B \in \mathcal{M}\right\} .$$

Montrer que $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone sur Ω.
On remarque que $A \in \mathcal{M}_B$ si et seulement si $B \in \mathcal{M}_A$.

5. Vérifier que $\mathcal{M}_\Omega = \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M}_\emptyset = \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}$, alors $\Omega \in \mathcal{M}_A$.
6. Soit $\mathcal{C}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$, stable par intersection finie.
   a). Montrer que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_C$. En déduire que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_C$.
   b). En déduire que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, pour tout $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $C \in \mathcal{M}(\mathcal{C})_B$. Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_B$.
   c). Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie.

d). On suppose que $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ (c'est le cas si $\Omega \in \mathcal{C}$). Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Exercice 46. : Soit Ω un ensemble.
Soit $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. L'ensemble $B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A)$ est appelée la différence propre de B par A dans le cas où $A \subset B$.
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est un σ-anneau sur Ω si

a). $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b). $\mathcal{A}$ est stable par différence propre : pour tous A et B de $\mathcal{A}$ vérifiant $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

c). $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie ou dénombrable : pour tout ensemble fini ou dénombrable J et toute famille $(A_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\bigcup_{j\in J} A_i \ \in \ \mathcal{A}\,.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est un système de Dynkin sur Ω si $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés a) et b) précédentes et aussi la propriété

c'). $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie ou dénombrable d'éléments deux à deux disjoints : pour tout ensemble fini ou dénombrable J et toute famille $(A_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$ dans J,

$$\bigcup_{j\in J} A_j \ \in \ \mathcal{A}\,.$$

1. Vérifier qu'une tribu sur Ω est un σ-anneau sur Ω.
2. Vérifier que $\mathcal{P}_d(\Omega)$ (défini dans l'exercice 40) est un σ-anneau sur Ω.
3. Vérifier que $\mathcal{P}_d(\Omega)$ est une tribu si et seulement si Ω est un ensemble au plus dénombrable.
4. Soit $\mathcal{A}$ un σ-anneau sur Ω. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu si et seulement si $\Omega \in \mathcal{A}$.
5. Soit $\mathcal{A}$ un σ-anneau sur Ω et $E \in \mathcal{A}$. Vérifier que $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A}; A \subset E\}$ est une tribu sur E.
6. Soit $\mathcal{A}$ un σ-anneau sur Ω. Soit J un ensemble fini ou dénombrable et $(A_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que
$$\bigcap_{j\in J} A_i \ \in \ \mathcal{A}\,.$$
(Indication : on pourra utiliser 4 avec $E = \bigcup_{j\in J} A_i$.)
7. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω. Montrer qu'il existe un plus petit σ-anneau sur Ω contenant $\mathcal{E}$. On le note $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.
8. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω. Soit $\mathcal{E}_d$ l'ensemble des parties B de Ω pour lesquelles il existe un ensemble fini ou dénombrable J et une famille d'éléments $(E_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{E}$ tels que
$$B \ \subset \ \bigcup_{j\in J} E_j \ \in \ \mathcal{A}\,.$$
Vérifier que $\mathcal{E}_d$ est un σ-anneau sur Ω contenant $\mathcal{E}$.

9. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω. Vérifier que toute partie $B \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ est contenu dans une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$.
10. Soit $\mathcal{A}$ est un σ-anneau sur Ω. Vérifier que $\mathcal{A}$ est un système de Dynkin sur Ω.
11. Soit $\mathcal{A}$ est un système de Dynkin sur Ω qui stable par intersection de deux éléments : pour tout $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.
    1). Montrer que, pour $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
    2). Montrer que, pour $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.
    3). Soit J un ensemble fini ou dénombrable et $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que
    $$\bigcup_{j \in J} A_i \; \in \; \mathcal{A} \, .$$
    (Indication : on écrira cette réunion comme une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.)
    4). Montrer que $\mathcal{A}$ est un σ-anneau sur Ω.
12. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω. Montrer qu'il existe un plus petit système de Dynkin sur Ω contenant $\mathcal{E}$. On le note $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Vérifier que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{E})$.
13. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Ω qui est stable par intersection de deux éléments. On va montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E})$.
    1). Pour $A \in \Omega$, soit $\mathcal{D}_A = \{E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}); A \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est un système de Dynkin sur Ω contenu dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.
    2). Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
    3). Montrer que si $A \in \mathcal{E}$ et si $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ alors $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
    4). Soit $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
    5). Montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est un σ-anneau sur Ω.
    6). En déduire que $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$. On a montré $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E})$ d'après 12.
    7). On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.