Mesures.

Exercice 47. : Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset; \Omega\}$ la tribu grossière sur Ω et A une partie non vide et stricte de Ω. On rappelle que la tribu engendrée par $\mathcal{A} = \{A\}$ est donnée par $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\emptyset; A; \Omega \setminus A; \Omega\}$.

1. Soit $m \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Trouver toutes les mesures positives μ sur $\mathcal{T}_0$ telles que $\mu(\Omega) = m$?
2. Soit $m \in \mathbb{R}^+$. Trouver toutes les mesures positives μ sur $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ telles que $\mu(\Omega) = m$.
3. Trouver toutes les mesures positives μ sur $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ telles que $\mu(\Omega) = +\infty$.
4. Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que l'application $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui, à $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, associe $\delta_\omega(A) = 1$ si $\omega \in A$ et $\delta_\omega(A) = 0$ sinon, est une mesure positive finie sur Ω.

Exercice 48. : Soit Ω un ensemble, soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On sait que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω. Soit card : $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui, à $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, associe son cardinal. Montrer que card est une mesure positive. On l'appelle aussi la mesure de comptage ou la mesure du décompte sur Ω.

Exercice 49. : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. Montrer que $\mu + \lambda\nu$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω telle que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Montrer que la restriction à $\mathcal{T}'$ d'une mesure μ sur $\mathcal{T}$ est une mesure sur $\mathcal{T}'$.

Exercice 50. : Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, soit $\mu = \delta_0 + 2\delta_1 + 5\delta_{\sqrt{2}}$, ν la mesure de comptage et $\nu_{\mathbb{Z}}$ la mesure de comptage des éléments de $\mathbb{Z}$ définie par, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\nu_{\mathbb{Z}}(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z})$. Déterminer $\mu(P)$, $\nu(P)$ et $\nu_{\mathbb{Z}}(P)$, pour P donné successivement par les ensembles :

$$A = [0;1[\,, \quad B = \mathbb{R}^-\,, \quad C = \mathbb{Q}\,, \quad D = \{2;3;4\}\,, \quad E = \{-2;\sqrt{2}\}\,.$$

Exercice 51. : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\omega_1; \cdots; \omega_n) \in \Omega^n$, $(\lambda_1; \cdots; \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, définie par

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{\omega_k}(A)\,,$$

est une mesure positive finie sur $\mathcal{T}$.

2. Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que l'application $\nu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, définie par

$$\nu(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \delta_{\omega_n}(A)\,,$$

est une mesure positive sur $\mathcal{T}$. À quelle condition est-elle finie ?

3. Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que l'application $\nu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, définie par la somme suivante de famille de termes positifs

$$\nu(A) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n \cdot \delta_{\omega_n}(A)\,,$$

est une mesure positive sur $\mathcal{T}$.

Exercice 52. : On se place dans le cadre de l'exercice 42.

1. On suppose que $f : X \longrightarrow Y$ surjective. Montrer que, pour tout $A \in f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$, il existe un unique $B \in \mathcal{T}_Y$ tel que $A = f^{-1}(B)$. Soit μ_Y une mesure positive sur $\mathcal{T}_Y$. Montrer que $\nu : f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par $\nu(f^{-1}(B)) = \mu_Y(B)$ est bien définie et est une mesure positive sur la tribu $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ de X.
2. Soit μ_X une mesure positive sur $\mathcal{T}_X$. On rappelle que $\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X) = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur Y. Montrer que l'application $\tau : \mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\tau(B) = \mu_X(f^{-1}(B))$ est une mesure positive sur la tribu $\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X)$ de Y.
3. Soit $E \in \mathcal{T}_X$. On rappelle que $\mathcal{T}_X|E = \{B \cap E; B \in \mathcal{T}_X\} = \{B \subset E; B \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur E qui est incluse dans $\mathcal{T}_X$. Vérifier que la restriction $(\mu_X)_{|E}$ de μ_X à $\mathcal{T}_X|E$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_X|E$.
4. Soit E une partie de Y et $\mathcal{T}_Y|E = \{B\cap E; B \in \mathcal{T}_Y\}$. Vérifier que $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}(j;\mathcal{T}_Y|E)$, où l'application $j : E \longrightarrow Y$ est donnée par $j(y) = y$. Soit μ_E une mesure positive sur $\mathcal{T}_Y|E$. Montrer que la mesure τ du 2, avec f remplacée par j et μ_X remplacée par μ_E, est une extension de la mesure positive $\mathcal{T}_Y \ni B \mapsto \mu_E(B \cap E)$.
5. Soit $j : X \times Y \longrightarrow X$ donnée par $j(x;y) = x$. On pose $\mathcal{T}_p = j^{-1}(\mathcal{T}_X)$. Vérifier que $\mathcal{T}(j;\mathcal{T}_p) = \mathcal{T}_X$. Soit μ_X une mesure positive sur $\mathcal{T}_X$. Montrer que la mesure ν du 1, avec f remplacée par j et μ_Y remplacée par μ_X, est donnée par, pour $A \in \mathcal{T}_X$, $\nu(A \times Y) = \mu_X(A)$. Montrer que la mesure τ du 2, avec f remplacée par j et μ_X remplacée par ν, est μ_X.
6. Soit $Y = \{0;1\}$, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(Y)$ et $\mu_Y = \delta_0$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ la fonction constante égale à 1. Trouver $(B;B') \in \mathcal{T}_Y^2$ tel que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$ et $\mu_Y(B) \neq \mu_Y(B')$. Dans ce cas, on ne peut procéder à la construction de la mesure ν du 1.
   Vérifier que l'on peut construire cette mesure ν du 1 si l'on remplace la tribu $\mathcal{T}_Y$ sur Y par $\mathcal{T}_Y|f(X)$.

Remarque : La mesure τ du 2 jouera un rôle dans la formule de changement de variables pour les intégrales de Lebesgue.

Exercice 53. : Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On rappelle qu'une partie N de Ω est dite μ-négligeable s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

1. Soit μ la mesure du décompte sur Ω. Quelles sont les parties μ-négligeables ?
2. Soit $\omega \in \Omega$ et $\mu = \delta_\omega$ (cf. exercice 47). Quelles sont les parties μ-négligeables ?
3. Soit $(\omega; \omega') \in \Omega^2$ avec $\omega' \neq \omega$ et $A = \{\omega; \omega'\} \neq \Omega$. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$ la tribu sur Ω engendrée par la famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω donnée par $\mathcal{A} = \{A\}$. Soit $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure positive telle que $\mu(A) = 0$ et $m := \mu(\Omega) > 0$. Déterminer explicitement μ en fonction de m et toutes les parties μ-négligeables. Quelles sont les parties μ-négligeables qui n'appartiennent pas à $\mathcal{T}$?

Exercice 54. : Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On rappelle qu'une partie N de Ω est dite μ-négligeable s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$. Pour $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, on pose $A \setminus B := A \cap (\Omega \setminus B)$.

1. Soit $(A; B) \in \mathcal{T}^2$. Montrer que
$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \text{et} \quad \mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) .$$
En déduire
$$\mu(A \cap B) \ + \ \mu(A \cup B) \ = \ \mu(A) \ + \ \mu(B) .$$
2. Soit $(A; B) \in \mathcal{T}^2$ tel que $A \subset B$. Montrer que $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. Dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, donner un exemple de boréliens A et B vérifiant $A \subset B$, $A \neq B$ et $\lambda(A) = \lambda(B)$.
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Construire une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$\bigcup_{n=0}^{m} B_n \ = \ \bigcup_{n=0}^{m} A_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n .$$
En déduire que
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \ \leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) .$$
5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n\big) .$$
(Indication : on pourra utiliser la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du 4.)
6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_p) < +\infty$. Montrer que
$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n\big) .$$
(Indication : on pourra introduire, pour $n \geq p$, $C_n = A_p \setminus A_n$ et utiliser le 5.)

7. Dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, donner un exemple de suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont l'intersection est vide et telle que $\lim \lambda(A_n) > 0$.
8. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments μ-négligeables de $\mathcal{T}$. Montrer que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
est μ-négligeable.
9. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$. Que peut-on dire de $\mu(\liminf A_n)$?
10. Dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, on considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de boréliens de $\mathbb{R}$ donnée par $A_n =]-\infty; 1+1/n[$ si n est pair et par $A_n =]1-1/n; +\infty[$ si n est impair. Vérifier que $\lambda(\liminf A_n) = 0$ et $\lambda(\limsup A_n) = +\infty$.
11. Vérifier que la famille $\mathcal{T}_\mu = \{A \cup N; A \in \mathcal{T}, N\ \mu\text{-négligeable}\}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω, qui contient $\mathcal{T}$.
12. Soit $\tilde{\mu} : \mathcal{T}_\mu \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par, pour $B \in \mathcal{T}_\mu$, $\tilde{\mu}(B) = \mu(A)$, où $B = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{T}$ et N μ-négligeable. Vérifier que $\tilde{\mu}$ est bien définie et est une mesure positive sur $\mathcal{T}_\mu$, qui prolonge μ. Vérifier que tout ensemble $\tilde{\mu}$-négligeable appartient à $\mathcal{T}_\mu$.

Exercice 55. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On rappelle que c'est l'unique mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui est invariante par translation et telle que $\mu([0; 1]) = 1$. Pour $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$, on va montrer que $\lambda([a; b]) = b - a$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, vérifier que $\lambda(\{a\}) = 0$. (Indication : on pourra procéder par l'absurde et montrer qu'alors, il existe $m > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{a\}) = m$.)
2. Montrer que, pour tout $c \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda([0; nc]) = n\lambda([0; c])$.
3. Montrer que, pour tout $d \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda([0; d/n]) = \lambda([0; d])/n$.
4. Pour $r \in \mathbb{Q}^+$, montrer que $\lambda([0; r]) = r$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\lambda([0; x]) = x$.
(Indication : on pourra commencer par montrer que x est limite d'une suite de rationnels inférieurs ou égaux à x et aussi limite d'une suite de rationnels supérieurs ou égaux à x.)
6. Conclure.

Exercice 56. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 55.

1. Déterminer $\lambda(\{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\})$, $\lambda(\mathbb{Z})$, $\lambda(\mathbb{Q})$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, vérifier que les mesures $\lambda(]a; a+\pi[)$, $\lambda([a; a+\pi[)$, $\lambda(]a; a+\pi])$ et $\lambda([a; a+\pi])$ sont égales.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\lambda(]a; +\infty[) = +\infty = \lambda(]-\infty; a[)$. En déduire que $\lambda(\mathbb{R})$.

4. Vérifier que $\lambda(\mathbb{R})$ est différente de la somme de la famille $(\lambda(\{a\}))_{a\in\mathbb{R}}$.
   On remarque que $(\{a\})_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille infinie non dénombrable de parties deux à deux disjointes de $\mathbb{R}$.
5. Contruire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres strictement positifs telle que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \,.$$
6. Construire un borélien $F \subset [0;1]$, qui est une réunion dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints et qui est de mesure de Lebesgue 1.
7. Construire un borélien non borné $F \subset \mathbb{R}^+$, qui est une réunion dénombrable de segments deux à deux disjoints et qui est de mesure de Lebesgue 1.

Exercice 57. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour une mesure positive μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit qu'une partie N de $\mathbb{R}$ est négligeable pour μ, ou μ-négligeable, s'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

1. Montrer que, pour tout ouvert non vide O de $\mathbb{R}$, $\lambda(O) > 0$. Donner une partie infinie et fermée F de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda(F) = 0$.
2. Montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\lambda(K) < +\infty$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est λ-pp nulle. Cela signifie que l'ensemble $N = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ est λ-négligeable. Montrer que f est nulle.
4. Donner un exemple de fonction non nulle qui est λ-pp nulle.
5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe une partie λ-négligeable N de $\mathbb{R}$ telle que les fonctions f et $\mathbb{1}_{[0;1]}$ coïncident sur $\mathbb{R} \setminus N$.
   a). Montrer qu'il existe $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$.
   b). Montrer que $\lambda(f^{-1}(]0;1[)) > 0$.
   c). En déduire une contradiction.
6. Soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure positive donnée par
$$\mu(A) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{1/n}(A) \,.$$
   Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f et $\mathbb{1}_{[0;1]}$ coïncident sur $\mathbb{R}\setminus N$, où N est une partie μ-négligeable de $\mathbb{R}$.
7. Même question avec $\mathbb{1}_{[0;1]}$ remplacée par $\mathbb{1}_{[0;1/2]}$.

Exercice 58. : Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\mu(K) < +\infty$. Pour $a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc $\mu(\{a\}) < +\infty$. On dit qu'un réel a est un atome de μ si $\mu(\{a\}) > 0$. Soit D_μ l'ensemble des atomes de μ.
Soit $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F_\mu(x) = \mu(]0;x])$, pour $x \geq 0$, et par $F_\mu(x) = -\mu(]x;0])$, pour $x < 0$.
On note par λ la mesure de Lebesgue.

1. Déterminer F_{δ_1}, F_{δ_0} et F_λ.
2. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left]a+\frac{1}{n}\,;\,b\right]\right) \;=\; \mu(]a;b]) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left]a-\frac{1}{n}\,;\,b\right]\right).$$

3. Montrer que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $\mu(]a;b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$. En déduire que F_μ est croissante.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F_μ est continue à droite en a. Montrer que F_μ admet une limite finie à gauche en a, notée $F_\mu(a^-)$. Vérifier que $\mu(\{a\}) = F_\mu(a) - F_\mu(a^-)$.
5. En déduire que $a \in D_\mu$ si et seulement si F_μ n'est pas continue en a.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mu(\{a\}))_{a\in D_\mu\cap[-n;n]}$ est sommable. En déduire que D_μ est au plus dénombrable.
7. Soit $\mu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\mu_d(A) \;=\; \sum_{a\in A\cap D_\mu} \mu(\{a\}).$$

   Montrer que μ_d est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
8. Vérifier qu'il existe une unique mesure positive μ_c sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu = \mu_c + \mu_d$ et μ_c n'a pas d'atome.

Exercice 59. : Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

a). $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b). Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

c). Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$,

$$\bigcup_{i\in I} A_i \;\in\; \mathcal{A}.$$

d). Pour tout $a \in \Omega$, $\{a\} \in \mathcal{A}$.

Soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$, pour tout $a \in \Omega$, $\mu(\{a\}) = 0$, et, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \;=\; \sum_{i\in I} \mu(A_i),$$

où le dernier terme est la somme de la famille $(\mu(A_i))_{i\in I}$ d'éléments positifs.
Montrer que μ est nulle.

Remarque : Cet exercice permet de comprendre pourquoi on a imposé la stabilité par réunion *au plus dénombrable* dans la définition des tribus et l'additivité *au plus dénombrable* dans la définition des mesures.

En effet, prenons $\Omega = \mathbb{R}$, un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de $\mathbb{R}$ et essayons de construire une application $\nu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui soit une extension de la notion de longueur pour les intervalles. Une telle application ν doit être définie sur les singletons et valoir zéro sur chacun donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{a\} \in \mathcal{C}$ et $\nu(\{a\}) = 0$.
Si l'on impose à $(\mathcal{C}; \nu)$ les conditions imposées dans l'exercice à $(\mathcal{A}; \mu)$, ce qui est raisonnable si l'on souhaite retirer la condition de dénombrabilité dans les définitions de tribu et de mesure, on tombe sur $\nu = 0$!
En imposant cette condition de dénombrabilité dans les définitions de tribu et de mesure, le cours a réussi à construire une extension de la notion de longueur pour les intervalles, c'est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Borel.

Exercice 60. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sur $[0; 1[$, on considère la relation $\mathcal{R}$ donnée par $x\mathcal{R}y$ si $x-y \in \mathbb{Q}$. On va vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note par $\bar{x}$ la classe de $x \in [0; 1[$ pour la relation $\mathcal{R}$. On admet que, par l'axiome du choix, il existe un ensemble $F \subset [0; 1[$ tel que, pour chaque classe X pour la relation $\mathcal{R}$, il existe un unique $x \in F$ tel que $X = \bar{x}$. Pour $r \in \mathbb{Q}$, on définit les ensembles

$$F + r \;=\; \big\{x + r\,;\; x \in F\big\} \quad \text{et} \quad M \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1;1]} \big(F + q\big)\,.$$

On va montrer que F n'est pas borélien (i.e. $F \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer les inclusions $[0; 1[\subset M \subset [-1; 2]$.
3. Montrer que, si $(q; q') \in \mathbb{Q}^2$ et $q \neq q'$, alors $(F + q) \cap (F + q') = \emptyset$.
4. On suppose que $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(M) \in \{0; +\infty\}$.
5. Établir une contradiction.

Exercice 61. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}_d(\Omega)$ la tribu sur Ω définie dans l'exercice 40. Soit $\mu : \mathcal{T}_d(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\mu(A) = 0$ si $A \in \mathcal{P}_d(\Omega)$ et $\mu(A) = 1$ sinon.

1. Soit $(A; B) \in \mathcal{T}_d(\Omega)^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que la proposition ($A \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$ et $B \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$) est fausse.
2. Vérifier que μ est une mesure.
3. Montrer que $\mu = 0$ si et seulement si $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) \neq \emptyset$.
4. On suppose que $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \emptyset$. Vérifier que $\mu(\Omega) = 1$.
5. On suppose $\Omega = \mathbb{R}$. On sait que $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (cf. exercice 40). Quelle est la restriction de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$?

Remarque : Lorsque Ω est au plus dénombrable, on a vu dans l'exercice 40 que $\mathcal{P}_d(\Omega) = \mathcal{P}_{cd}(\Omega) \neq \emptyset$. Dans ce cas, μ est nulle.

Exercice 62. : On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$. On définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $C_0 = [0;1]$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists (a_1;\cdots;a_n) \in \{0;2\}^n\,,\ \exists \epsilon \in [0;1]\,;\ x \;=\; \epsilon \cdot 3^{-n} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 3^{-k};\ \right\}.$$

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les parties de $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{3}\,C_n \;:=\; \left\{ \frac{x}{3};\ x \in C_n \right\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\,(2 + C_n) \;:=\; \left\{ \frac{2+x}{3};\ x \in C_n \right\}.$$

On pose

$$C \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\,.$$

Soit $\varphi : \{0;2\}^{\mathbb{N}^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \{0;2\}^{\mathbb{N}^*}$,

$$\varphi(a) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k \cdot 3^{-k} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 3^{-k}\,.$$

1. Montrer que C_1 est la réunion disjointe de deux intervalles non vides que l'on précisera.
2. Montrer que C_2 est la réunion disjointe de quatres intervalles non vides que l'on précisera.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$,
$$C_{n+1} \;=\; \left(\frac{1}{3}\,C_n\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}\,(2 + C_n)\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3}\,C_n\right) \bigcap \left(\frac{1}{3}\,(2 + C_n)\right) \;=\; \emptyset\,.$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\lambda(C_n)$. Vérifier que $\lambda(C) = 0$.
6. Montrer que φ réalise une bijection de $\{0;2\}^{\mathbb{N}^*}$ sur C.
7. Vérifier que C est infini. Est-il dénombrable ?
8. Existe-t-il une bijection de C sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Remarque : l'ensemble C s'appelle l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 63. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in [0;1[^{\mathbb{N}^*}$. On définit par récurrence une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $[0;1]$ de la façon suivante : $D_0 = [0;1]$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n \;=\; \left(\frac{1-a_n}{2}\,D_{n-1}\right) \bigcup \left(\frac{1-a_n}{2}\left(\frac{1+a_n}{1-a_n} + D_{n-1}\right)\right).$$

On pose

$$D \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les bijections croissantes $g_n : D_0 \longrightarrow (1-a_n)/2 \cdot D_0$ et $d_n : D_0 \longrightarrow (1+a_n)/2 + (1-a_n)/2 \cdot D_0$ données par

$$g_n(x) \;=\; \frac{1-a_n}{2} \cdot x \quad \text{et} \quad d_n(x) \;=\; \frac{1-a_n}{2}\left(\frac{1+a_n}{1-a_n} + x\right) \;=\; \frac{1+a_n}{2} + g_n(x)\,.$$

1. Pour $0 < a_2 < a_1 < a_3 < 1$, déterminer et dessiner D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est la réunion disjointe de 2^n segments, tous de longueur
$$\ell_n \;=\; 2^{-n} \prod_{k=0}^{n} \big(1 \,-\, a_k\big)\,,$$
où $a_0 := 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $D_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et déterminer $\lambda(D_n)$.
4. Vérifier que $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et déterminer $\lambda(D)$ en fonction de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer que $\lambda(D) > 0$ si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k$ converge.
(Indication : on pourra utiliser le fait que, pour $t > 0$, $1 + \ln(t) \leq t$.)
6. Montrer que, pour tout $x \in D$, tout voisinage de x contient un point n'appartenant pas à D.
En particulier, D est d'intérieur vide.
7. Soit $x \in D$. Montrer que tout voisinage de x contient un point de $D \setminus \{x\}$.
En particulier, x n'est pas isolé dans D.
8. Vérifier que l'ensemble C de l'exercice 62 est égal au présent ensemble D pour une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in [0; 1[^{\mathbb{N}^*}$ que l'on précisera. Retrouver le fait que $\lambda(C) = 0$.
9. On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ donnée par, pour $k \geq 1$, $a_k = (4k^2)^{-1}$. Montrer que $\lambda(D) = 2/\pi$.
(Indication : on pourra utiliser un résultat du TD 2 d'analyse complexe.)

Remarque : L'ensemble D est appelé l'ensemble de Cantor associé à la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. En choisissant convenablement la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on peut donc construire un ensemble de Cantor dans $[0; 1]$ dont la mesure de Lebesgue est nulle ou bien non nulle.

Exercice 64. : On utilise les notions et les notations de l'exercice 45.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}$, qui contient Ω et qui est stable par passage au complémentaire et par réunion finie, telle que, pour $C \in \mathcal{C}$, $\mu(C) = \nu(C)$.

1. Soit $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = \nu(A)\}$. Vérifier que $\mathcal{M}$ est une classe monotone vérifiant $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.
2. On suppose de plus que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$. Montrer que $\mu = \nu$.
3. Application : montrer que deux mesures positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$), qui coïncident sur les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^d$, sont en fait égales.

Exercice 65. : On utilise les notions, les notations et les résultats de l'exercice 46.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{T}$, qui est stable par intersection finie, telle que, pour $E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$. On va montrer qu'alors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. .

1. Vérifier que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, le σ-anneau engendré par $\mathcal{E}$, vérifie $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$.
2. On suppose μ et ν bornées (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$ et $\nu(\Omega) < +\infty$).

a). Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties E de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ telles que $\mu(E) = \nu(E)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin qui contient $\mathcal{E}$.
b). En déduire que $\mathcal{D} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$.

3. On ne suppose plus que les mesures μ et ν soient bornées. Soit $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. D'après l'exercice 46, on sait qu'il existe une famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
a). Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\mathcal{S}_n = \{E \cap E_n; E \in \mathcal{S}(\mathcal{E})\}$ est le σ-anneau engendré par $\mathcal{E}_n = \{E \cap E_n; E \in \mathcal{E}\}$.
b). Pour le même $n \in \mathbb{N}$, soit μ_n et ν_n les restrictions à E_n de μ et ν, respectivement. Vérifier que μ_n et ν_n sont bornées. En déduire que $\mu_n = \nu_n$.
c). En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)$.
d). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et on considère la proposition $\mathcal{P}(n) = (\mu(A \cap F_n) = \nu(A \cap F_n))$. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e). En déduire que $\mu(A) = \nu(A)$. (Indication : on pourra vérifier que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et utiliser l'exercice 54.)

4. En déduire que μ et ν coïncident sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. (Par l'exercice 46, on sait que $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.)

5. On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ et que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mu = \nu$.

Remarque : on peut utiliser cet exercice pour montrer l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.