Applications mesurables.

Exercice 66. : Soit X (resp. Y) un ensemble et $\mathcal{T}_X$ (resp. $\mathcal{T}_Y$) une tribu sur X (resp. Y). On dit qu'une fonction $g : X \longrightarrow Y$ est mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$ si, pour tout $B \in \mathcal{T}_Y$, $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.
On note par $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ l'ensemble des fonctions $g : X \longrightarrow Y$ qui sont mesurables relativement aux tribus $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$. Lorsque $X = Y$ et $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$, on note l'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ simplement par $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X)$.
Soit $f : X \longrightarrow Y$. On utilise les notions et les notations des exercices 42 et 52.

1. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subset \mathcal{T}_X$.
2. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X)$.
3. On considère l'ensemble $\{B \cap f(X); B \in \mathcal{T}_Y\}$ de parties de la partie $f(X)$ de Y. On a vu que c'est une tribu sur $f(X)$, c'est la trace de la tribu $\mathcal{T}_Y$ sur $f(X)$ notée $\mathcal{T}_Y|f(X)$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ si et seulement si l'application $g : X \longrightarrow f(X)$, donnée par $g(x) = f(x)$, appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y|f(X))$.
4. Soit E une partie de X et $\mathcal{T}_X|E$ la tribu sur E définie par $\mathcal{T}_X|E = \{A \cap E; A \in \mathcal{T}_X\}$. $\mathcal{T}_X|E$ est appelée la trace sur E de la tribu $\mathcal{T}_X$. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$, alors la restriction $f_{|E}$ de f à E appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X|E;\mathcal{T}_Y)$.
5. Soit $E \in \mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}$ une tribu sur E avec $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X|E$. Soit $y_0 \in Y$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{T}_Y)$. Soit $\tilde{g} : X \longrightarrow Y$ donnée par $\tilde{g}(x) = g(x)$, si $x \in E$, et $\tilde{g}(x) = y_0$, si $x \notin E$. Montrer que $\tilde{g} \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$.
6. Soit $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{T}_X$. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur E et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in E$, associe 1. Vérifier que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $\tilde{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\tilde{g}(x) = g(x)$, si $x \in E$, et $\tilde{g}(x) = 0$, si $x \notin E$. Montrer que $\tilde{g} \notin \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   On remarque que l'on peut prendre $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X|E$.
7. On suppose que la tribu $\mathcal{T}_Y$ est engendrée par une famille $\mathcal{E}$ de parties de Y, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.
8. Soit Z un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}_Z$ et une application $g : Y \longrightarrow Z$. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_Y;\mathcal{T}_Z)$, alors $g \circ f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Z)$.
9. On suppose que f est constante. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$.
10. Montrer que la fonction identique id_X sur X appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X)$. Montrer qu'elle appartient aussi à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T})$, si $\mathcal{T}$ est une tribu sur X vérifiant $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$.
11. Vérifier que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(X);\mathcal{T}_Y)$.
12. On suppose que la fonction f prend un nombre fini de valeurs : $c_1, \cdots, c_n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $V = \{c_j; j \in [1;n] \cap \mathbb{N}\} \subset Y$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{T}_Y|V) \subset \mathcal{T}_X$.

13. On suppose que f prend un nombre fini de valeurs : $c_1, \cdots, c_n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, et que, pour tout $j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{T}_X$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$.
14. Soit $X = \{x_1;x_2;x_3;x_4\}$ un ensemble à exactement 4 éléments, soit $A = \{x_1;x_2\}$ et $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(\{A\})$. Soit Y un ensemble ayant au moins 4 éléments. Soit $f : X \longrightarrow Y$ injective. Pour $j \in \{1;2;3;4\}$, soit $c_j = f(x_j)$. Soit B une partie de Y telle que $\{c_1;c_2\} \subset B$ et $\{c_3;c_4\} \subset Y \setminus B$. Soit $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\{B\})$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$ mais que, pour tout $j \in \{1;2;3;4\}$, $f^{-1}(\{c_j\}) \notin \mathcal{T}_X$.
15. On suppose l'on a une partition $(X_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de X en éléments de $\mathcal{T}_X$: I est un ensemble au plus dénombrable ; pour tout $i \in I$, $X_i \in \mathcal{T}_X$; pour tout $(i;j) \in I^2$ avec $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$;
$$X \;=\; \bigcup_{i\in I} X_i \,.$$
Montrer que
$$\big(f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)\big) \iff \big(\forall i \in I \,,\, f_{|X_i} \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X|X_i;\mathcal{T}_Y)\big) \,.$$
16. Soit $X = \{x_1;x_2;x_3\}$ avec $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$ et $x_1 \neq x_3$. Soit $A = \{x_1\}$ et $\mathcal{T}$ la tribu sur X engendrée par $\mathcal{A} = \{A\}$. Trouver une fonction $f : X \longrightarrow X$ telle que $f \notin \mathcal{M}(\mathcal{T})$.

Remarque : Soit $f : X \longrightarrow Y$ et μ_X une mesure positive définie sur $\mathcal{T}_X$. D'après le 2 de l'exercice 52, elle définit une mesure τ sur la tribu $\mathcal{T}(f;\mathcal{T}_X)$ sur Y par la formule $\tau(B) = \mu_X(f^{-1}(B))$. Si, de plus, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X;\mathcal{T}_Y)$, alors, par le 2 du présent exercice, on peut restreindre τ à la tribu $\mathcal{T}_Y$. La restriction de τ à $\mathcal{T}_Y$ est appelée la *mesure image* de μ_X par l'application f. Cette notion est centrale dans la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue.

Exercice 67. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On rappelle que f est dite étagée sur $(\Omega, \mathcal{T})$ si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et si elle prend un nombre fini de valeurs.

1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{T}$.
   b). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{T}$.
   c). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) > a\} \in \mathcal{T}$.
   d). Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si l'image réciproque par f de toute boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ (pour N) appartient à $\mathcal{T}$.
2. Pour $d = 1$ et f positive, montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.
3. Soit $(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Montrer que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m);\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

4. Soit $S : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par $S(x;y) = x+y$. Montrer que $S \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d});\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
5. Soit $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par $P(x;y) = x \cdot y$. Montrer que $P \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1});\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
6. Montrer que $f = (f_1;\cdots;f_d) \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si, pour tout $j \in [1;d] \cap \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
7. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$, deux applications $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $h \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, et une application $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   a). Montrer que $g+h \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
   b). Montrer que $ah \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
   c). Montrer que $\lambda h \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
8. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $A \in \mathcal{T}$.
9. Soit $(A;E) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tel que $E \cap A \neq \emptyset$ et $E \cap (\Omega \setminus A) \neq \emptyset$. On prend sur Ω la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\{A\})$. Montrer que
$$\mathbb{1}_{A\cap E} \notin \mathcal{M}\big(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \quad \text{mais que} \quad (\mathbb{1}_{A\cap E})_{|E} \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}|E;\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)\ .$$
10. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère $(d_1;\cdots;d_m) \in (\mathbb{R}^d)^m$, $(A_1;\cdots;A_m) \in \mathcal{T}^m$. Vérifier que l'application
$$g \ = \ \sum_{j=1}^{m} d_j \mathbb{1}_{A_j}$$
est étagée.
(Indication : on pourra montrer par récurence sur m que la fonction g prend au plus 2^m valeurs.)
11. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose que f prend un nombre fini de valeurs : $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^d$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_i \neq v_j$, si $i \neq j$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
$$\mathcal{P}_1 \ = \ \big(f \text{ est étagée}\big)\ ;\ \mathcal{P}_2 \ = \ \big(\forall j \in [1;n] \cap \mathbb{N}\ ,\ f^{-1}(\{v_j\}) \in \mathcal{T}\big)\ ;$$
$$\mathcal{P}_3 \ = \ \left(\forall j \in [1;n] \cap \mathbb{N}\ ,\ \exists A_j \in \mathcal{T}\ ;\ \Omega \ = \bigsqcup_{1\le j\le n} A_j\ ,\ f \ = \sum_{1\le j\le n} v_j \mathbb{1}_{A_j}\right)\ ;$$
12. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes : $\mathcal{Q}_1 = (f \text{ est étagée})$;
$$\mathcal{Q}_2 \ = \ \left(\exists p \in \mathbb{N}^*; \forall k \in [1;p] \cap \mathbb{N}\ ,\ \exists B_k \in \mathcal{T}\ ,\ \exists b_k \in \mathbb{R}^d\ ;\ f \ = \sum_{1\le k\le p} b_k \mathbb{1}_{B_k}\right)\ ;$$
$$\mathcal{Q}_3 \ = \ \left(\exists q \in \mathbb{N}^*; \forall k \in [1;q] \cap \mathbb{N}\ ,\ \exists C_k \in \mathcal{T}\ ,\ \exists c_k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\ ;\ f \ = \sum_{1\le k\le q} c_k \mathbb{1}_{C_k}\right)\ .$$

Remarque : On a donc montré que les fonctions étagées de Ω dans $\mathbb{R}^d$ sont les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'éléments de la tribu sur Ω.

Exercice 68. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$ et $(c_1; \cdots; c_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $j \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, f soit constante égale à c_j sur $]\sigma_{j-1}; \sigma_j[$.
Une fonction $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée si g prend un nombre fini de valeurs et si $g \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R})|[a; b]; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})|[a; b]$ est la trace de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[a; b]$ (cf. exercice 66).

1. Montrer que toute fonction en escalier sur $[a; b]$ est étagée sur $[a; b]$.
2. Montrer que la restriction de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ à $[a; b]$ est étagée mais n'est pas une fonction en escalier sur $[a; b]$.

Exercice 69. : Montrer que l'ensemble des fonctions étagées de $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 70. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. On suppose que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que f est positive et strictement majorée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^n[$, on pose
$$E_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ 2^{-n}kM \leq f(\omega) < 2^{-n}(k+1)M\right\} \quad \text{et}$$
$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n}kM \cdot \mathbb{1}_{E_k}\,.$$
Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées qui converge uniformément vers f.
2. On suppose que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que f est positive. Montrer qu'il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f.
(Indication : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra appliquer le résultat précédent à $g_n = \inf(f; n)$ pour construire une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers f, puis on pourra considérer $f_n = \max(h_0; h_1; \cdots; h_n)$.)
3. Montrer que le résultat du 1 est encore valable si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et f est bornée.
4. Montrer que le résultat du 2 est encore valable si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque : on sait par le cours que la réciproque du dernier résultat est vraie puisqu'une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Exercice 71. : On note par $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) la tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{R}$). On pose $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|\overline{\mathbb{R}^+}$. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

1. Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) > a\} \in \mathcal{T}$.
2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que f ne s'annule pas. Montrer que $1/f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
3. Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. En posant $1/(+\infty) = 0$ et $1/0 = +\infty$, $1/f$ est bien définie. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$ alors $1/f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$.

Exercice 72. : Vérifier que les résultats de l'exercice 67 sont encore valables si l'on remplace partout $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{R}^+$ ou $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Exercice 73. : Vérifier que le résultat du 4 de l'exercice 70 est encore valable si l'on remplace partout $\mathbb{R}$ par $\overline{\mathbb{R}^+}$ ou par $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 74. : Soit $\epsilon > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire, définie par $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \epsilon$ et par $f(x) = x - \epsilon$ si $x > \epsilon$. Soit μ_1 la mesure τ obtenue au 2 de l'exercice 52 avec X remplacé par $\mathbb{R}$, Y remplacé par $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_X$ remplacée par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ_X remplacée par λ. On a donc $\mathcal{T}(f; \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); f^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ et, pour $C \in \mathcal{T}(f; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu_1(C) = \lambda(f^{-1}(C))$.

1. Vérifier que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}(f; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
3. Soit μ la restriction de μ_1 à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vérifier que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\mu(K) < +\infty$. En particulier, on se trouve dans le cadre de l'exercice 58.
4. Déterminer explicitement la fonction F_μ associée à μ comme dans l'exercice 58.
5. Donner explicitement une décomposition du type du 8 de l'exercice 58 pour μ.

Exercice 75. : Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $(f \star \mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$. On va voir que $f \star \mu$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (c'est en fait la mesure image de μ par f, dans le sens donné dans l'exercice 66). On dit que la mesure μ est invariante par f si $f \star \mu = \mu$. On note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $f \star \mu$ est bien définie et est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$. Déterminer $g \star \delta_4$. Déterminer $g \star (\delta_{-2} + 3\delta_3)$.
3. Trouver une fonction $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que λ soit invariante par k.
4. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x$. Déterminer $h \star \lambda$.
5. Déterminer toutes les mesures positives finies invariantes par h. (Indication : pour une mesure positive μ, on pourra étudier la fonction $a \mapsto \mu([0; a])$.)

Exercice 76. : On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la tribu $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$ définie dans l'exercice 40. On rappelle que $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle aussi que $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des singletons de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{M}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{M}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R});\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big) .$$

2. Vérifier que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \setminus \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) .$$

3. Montrer que

$$\mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big) .$$

4. Montrer que

$$f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big) \iff \forall c \in \mathbb{R} ,\ f^{-1}(c) \in \mathcal{T}_d(\mathbb{R}) .$$

5. Vérifier qu'en notant $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $id(x) = x$, on a

$$id \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big) \setminus \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) .$$

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
   a). Soit $(c;c') \in \mathbb{R}^2$ tel que $c \neq c'$. Vérifier que les ensembles $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(c')$ sont disjoints. On suppose maintenant qu'ils appartiennent tous deux à $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$. Vérifier qu'ils sont tous les deux au plus dénombrables ou bien que l'un est au plus dénombrable et l'autre de complémentaire au plus dénombrable.
   b). On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer les implications

$$c \in A \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R}) ,$$
$$c \notin A \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{P}_{d}(\mathbb{R}) .$$

   En déduire que

$$f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) .$$

   En déduire que f prend un nombre au plus dénombrable de valeurs.
   c). On suppose que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R})$. En particulier, on sait par 4 que $f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big)$. Montrer les implications

$$A \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) ,$$

$$B \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R}) .$$

   d). Vérifier que le cas $f = id$ correspond au cas c).
   e). Vérifier que le cas d'une fonction f continue et strictement monotone correspond au cas c). Montrer dans ce cas que

$$f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R})\big) \setminus \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) .$$

   f). Vérifier que le cas d'une fonction f constante correspond au cas b).
   g). Vérifier que le cas où la fonction f est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ correspond au cas b).

7. Soit $f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. On montre qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$. On se trouve donc dans le cas 6.b).
   a). Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}([-p;p]) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$.
   b). Soit $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f^{-1}([a;b]) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$. Si $a = b$, on a bien $f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$, pour $c = a = b$. On suppose désormais que $a < b$. Construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}([a_n;b_n]) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$.
   c). On sait qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\{c\} \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n;b_n]\,.$$

   Montrer que $f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$.
8. Montrer que

$$f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \iff \exists!\, c \in \mathbb{R}\,,\; f^{-1}(c) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})\,.$$

Remarques :
Lorsque $f \in \mathcal{M}\big(\mathcal{T}_d(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, f prend un nombre au plus dénombrable de valeurs et, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on sait précisément, d'après le 6. b), quand $f^{-1}(A)$ appartient à $\mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$ et quand il appartient à $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$.
Le cas 6.e) se produit.
Pour la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, on a

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(1) \;=\; \mathbb{Q} \;\in\; \mathcal{P}_d(\mathbb{R})\,, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(0) \;=\; \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \;\in\; \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})\,,$$

et, pour $c \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(c) = \emptyset \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R})$.