# Intégrale de Lebesgue.

**Exercice 77. :** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $0 \leq f \leq g$ et $(f; g) \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))^2$. En utilisant la définition des intégrales, montrer que

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \leq +\infty \, .$$

**Exercice 78. :** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Soit $E \in \mathcal{T}$. Soit $f$ une fonction positive sur $\Omega$ telle que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Vérifier que $f \mathbb{1}_E \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Par l'exercice 66, on sait que la restriction $f_{|E}$ de $f$ à $E$ appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}|E; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{T}|E$ est la trace de la tribu $\mathcal{T}$ sur $E$ (cf. exercice 42). Montrer que

$$\int f_{|E} \, d(\mu_{|E}) = \int f \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu \, ,$$

où $\mu_{|E}$ est la restriction $\mu$ à $\mathcal{T}|E$ (cf. exercice 42).

3. Soit $g$ une fonction positive sur $E$ appartenant à $\mathcal{M}(\mathcal{T}|E; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On considère la fonction positive $\tilde{g} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{g}(x) = 0$, si $x \notin E$, et $\tilde{g}(x) = g(x)$, si $x \in E$. Vérifier que $\tilde{g} \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que

$$\int g \, d(\mu_{|E}) = \int \tilde{g} \, d\mu \, .$$

**Exercice 79. :** On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\nu = 5\delta_0$ et $\mu$ la mesure de comptage. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2$ si $x \in [-1; 2]$, $f(x) = 3$ si $x \in ]3; 4]$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[2;4[}$ et $h = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[-2;4[}$.

1. Montrer en utilisant la définition que $f$ et $g$ sont étagées et positives.
2. Calculer $\int f \, d\lambda$ et $\int f \, d\nu$.
3. Calculer $\int g \, d\lambda$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $h = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;-2[} + 10 \cdot \mathbb{1}_{[-2;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[0;4[}$.
5. Calculer $\int h \, d\lambda$ en utilisant les deux expressions précédentes de $h$.
6. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ est étagée positive. Calculer $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \, d\lambda$ et $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \, d\mu$.

**Exercice 80. :** On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 0$ si $|x| > 1$, $f(x) = x + 1$, si $x \in [-1; 0[$, et $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0; 1]$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de

$$\int f\, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} f \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}\, d\lambda \;=\; \int_{[-1;1]} f\, d\lambda$$

(qui est 1) en utilisant la définition.

1. Vérifier que $f$ est continue et positive. Elle est donc mesurable.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, on définit
$$A_k^n \;=\; \left\{x \in \mathbb{R};\, (k-1)n^{-1} \;\leq\; |x| \;<\; kn^{-1}\right\}$$
et on considère $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$g_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \mathbb{1}_{A_k^n} .$$
Vérifier que $g_n$ est étagée positive et que $g_n \leq f$. Déterminer
$$a_n \;:=\; \int g_n\, d\lambda .$$
3. En remarquant que
$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; n(n+1) ,$$
montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
4. En déduire, en utilisant uniquement la définition de l'intégrale, que
$$\int f\, d\lambda \;\geq\; 1 .$$
5. Soit $c \in [0; 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$b_n \;=\; \int g_n \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R};\, c<|x|\leq 1\}}\, d\lambda .$$
Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(1-c)^2$.
(Indication : on pourra utiliser que $\lim n^{-1}E(nc) = c$.)
6. Soit $h$ une fonction étagée positive non nulle telle que $h \leq f$.
a). Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, des réels $c_1; \cdots; c_p$, deux à deux distincts dans $[0; 1[$ et des boréliens $B_1; \cdots; B_p$, deux à deux disjoints, tels que
$$h \;=\; \sum_{j=1}^{p} (1 - c_j) \cdot \mathbb{1}_{B_j}$$
et, pour tout $j \in [1; p] \cap \mathbb{N}$, $B_j \subset [-c_j; c_j]$. Vérifier que
$$\int h\, d\lambda \;=\; \sum_{j=1}^{p} \int (1 - c_j) \cdot \mathbb{1}_{B_j} \cdot \mathbb{1}_{[-c_j;c_j]}\, d\lambda . \tag{22}$$

b). Pour $c_0 \in [0;1[\setminus\mathbb{Q}$, on considère la fonction étagée $h_0 = (1-c_0)\mathbb{1}_{[-c_0;c_0]}$. Vérifier que $h_0 \leq f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_0 \not\leq g_n$.

c). Soit $j \in [1;p] \cap \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_j(n) \;=\; \big\{t \in \mathbb{R}\,;\; |t| < n^{-1}E(nc_j)\big\} \;\subset\; [-c_j;c_j]\,.$$

Montrer que, pour tout $x \in I_j(n)$, $(1-c_j)\cdot \mathbb{1}_{B_j}(x) \leq g_n(x)$.

d). Soit $c = \max\{c_j; 1 \leq j \leq p\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\int h\,d\lambda \;\leq\; \int g_n \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R};\,|x|\leq c\}}\,d\lambda \;+\; \sum_{j=1}^{p} \int (1-c_j)\cdot \mathbb{1}_{B_j}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I_j(n)}\,d\lambda\,.$$

(Indication : on pourra écrire $\mathbb{1}_{[-c_j;c_j]} = \mathbb{1}_{I_j(n)} + \mathbb{1}_{[-c_j;c_j]\setminus I_j(n)}$ dans (22).)

e). Pour $j \in [1;p] \cap \mathbb{N}$, vérifier que

$$\int (1-c_j)\cdot \mathbb{1}_{B_j}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I_j(n)}\,d\lambda \;\leq\; (1-c_j)\cdot\lambda\Big([-c_j;c_j]\setminus I_j(n)\Big) \;\leq\; \frac{2}{n}\,.$$

f). Soit $\epsilon \in ]0;(1-c)^2[$. On choisit $n_0$ assez grand pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on ait $b_n \geq \epsilon$ et $n^{-1} \leq (2p)^{-1}\epsilon$ (c'est possible d'après 5. et le fait que $\lim n^{-1} = 0$). Montrer que

$$\int h\,d\lambda \;\leq\; \epsilon + \int g_n \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R};\,|x|\leq c\}}\,d\lambda \;\;\leq\; \int g_n\,d\lambda\,.$$

7. En déduire que

$$\int f\,d\lambda \;=\; 1\,.$$

**Exercice 81. :** Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable sur un espace mesurable $(\Omega;\mathcal{T})$ (on munit $\mathbb{R}^+$ de sa tribu borélienne). Soit $\omega \in \Omega$. On veut montrer la formule suivante :

$$\int f\,d\delta_\omega \;=\; f(\omega)\,. \tag{23}$$

1. Montrer que la formule (23) est valide si $f$ est étagée.
2. On suppose que $\{\omega\} \in \mathcal{T}$. En utilisant la fonction $h = f(\omega)\mathbb{1}_{\{\omega\}}$, montrer que (23) est vraie.
3. Traiter le cas général. (Indication : on pourra utiliser la fonction $g = f(\omega)\mathbb{1}_{A_\omega}$, où $A_\omega = f^{-1}(\{f(\omega)\})$.)

**Exercice 82. :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par l'exercice 51,

$$\mu \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$$

est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\int f\,d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\,.$$
En particulier, $f$ est $\mu$-intégrable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = 0$ si $x < 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = f(n)$ si $x \in [n; n+1[$. Vérifier que $g$ est mesurable et que
$$\int g\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu\,.$$
3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ à la fois $\mu$-intégrable et $\lambda$-intégrable. Construire une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $h = f$ sur $\mathbb{N}$ et
$$\int h\,d\lambda \;=\; +\infty\,.$$

**Exercice 83. :** Soit $\nu$ la mesure cardinal sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer toutes les fonctions étagées positives qui sont intégrables pour $\nu$. Donner une fonction positive intégrable pour $\nu$ qui n'est pas étagée.

**Exercice 84. :** Soit $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures positives sur un espace mesurable $(\Omega; \mathcal{T})$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable relativement à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Montrer que
$$\int f\,d(\mu_1+\mu_2) \;=\; \int f\,d\mu_1 + \int f\,d\mu_2\,.$$
En déduire que $f$ est $(\mu_1+\mu_2)$-intégrable si et seulement si $f$ est $\mu_1$-intégrable et $f$ est $\mu_2$-intégrable.

**Exercice 85. :** On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit $\mu$ une mesure positive sur une espace mesurable $(\Omega; \mathcal{T})$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \;=\; \Omega\,.$$
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive.

1. Montrer que la suite $(f\mathbb{1}_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$.
2. Montrer, en utilisant uniquement la définition de l'intégrale, que
$$\lim_{n\to\infty} \int f\mathbb{1}_{E_n}\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu\,.$$

**Exercice 86. :** On munit $\overline{\mathbb{R}^+}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit $\mu$ une mesure positive sur une espace mesurable $(\Omega;\mathcal{T})$. Soit $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que $f\in\mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B})$. Montrer que, pour tout $y\geq 0$, on a

$$y\cdot\mu\big(\{y\leq f\}\big)\ \leq\ \int f\,d\mu\,.$$

En déduire que, si $f$ est $\mu$-intégrable, la $\mu$-mesure de chacun des ensembles $\{y\leq f\}$, pour $y\in]0;+\infty[$, est finie et $\mu(\{f=+\infty\})=0$.
**Remarque :** L'inégalité précédente est l'inégalité de Tchebycheff.

**Exercice 87. :** On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$ et on note par $\lambda$ la mesure de Lebesgue. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n=n\mathbb{1}_{[n;+\infty[}$, $g_n=n\mathbb{1}_{[n;n+n^{-1}[}$ et $h_n=2n\mathbb{1}_{]0;n^{-1}[}$.

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone ? Vérifier qu'elle converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Vérifier que les quantités suivantes sont bien définies et comparer-les :

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda\quad\text{et}\quad\int\lim_{n\to\infty}f_n\,d\lambda\,.$$

3. Même questions pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Même questions pour la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 88. :** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$. On suppose que $f\in\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que $g\in\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{C}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{C})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. On considère les fonctions positives $f_+;f_-:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ données par $f_+=\max(0;f)$ et $f_-=\max(0;-f)$. Vérifier que $f_+=|f|\mathbb{1}_{\{f\geq 0\}}=|f|\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ et $f_-=|f|\mathbb{1}_{\{f\leq 0\}}=|f|\mathbb{1}_{\{f<0\}}$. Vérifier que $f_+$ et $f_-$ sont mesurables.
2. Montrer que $f_++f_-=|f|$. En déduire que $|f|$ est $\lambda$-intégrable si et seulement si $f_+$ et $f_-$ sont $\lambda$-intégrables.
3. En notant par $|c|$ le module d'un nombre complexe $c$, en notant par $\Re c$ (resp. $\Im c$) sa partie réelle (resp. imaginaire), montrer que $|\Re g|\leq|g|$, $|\Im g|\leq|g|$ et $|g|\leq|\Re g|+|\Im g|$. Vérifier que $|\Re g|$ et $|\Im g|$ sont mesurables.
4. Montrer que $|g|$ est $\lambda$-intégrable si et seulement si $|\Re g|$ et $|\Im g|$ sont $\lambda$-intégrables.

**Exercice 89. :** Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $-A:=\{-x;x\in A\}$ est aussi un borélien.
2. Montrer que, pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(-A)=\lambda(A)$.
(Indication : on pourra vérifier que $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{R})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par $\mu(B)=\lambda(-B)$ est une mesure positive.)
3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction borélienne, paire et $\lambda$-intégrable. Soit $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $-B=B$. Montrer que

$$\int f\cdot\mathbb{1}_B\,d\lambda\ =\ 2\int f\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_{[0;+\infty[}\,d\lambda\ =\ 2\int f\cdot\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_{]0;+\infty[}\,d\lambda\,.$$

4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne, impaire et $\lambda$-intégrable. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $-B = B$. Montrer que
$$\int g \cdot \mathbb{1}_B \, d\lambda \;=\; 0\,.$$
5. Soit $T > 0$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne, $T$-périodique et $\lambda$-intégrable sur tout compact. Vérifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_{[a;a+T]} h \, d\lambda \;=\; \int_{[0;T]} h \, d\lambda\,.$$

**Exercice 90. :** Vérifier que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont mesurables pour la tribu de Borel. Déterminer celles qui sont intégrables pour la mesure de Lebesgue. $E$ désigne la partie entière.

$$f_1(x) \;=\; x\,,\quad f_2(x) \;=\; E(x)\,,\quad f_3(x) \;=\; \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}\,,\quad f_4(x) \;=\; E(2\sin x)\,,\quad f_5(x) \;=\; \frac{\sin x}{1+x^2}\,,$$
$$\text{pour } x \neq 0\,,\quad f_6(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}\,\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,,\quad f_7(x) \;=\; \frac{\sin x}{x}\,,$$
$$\text{pour } x \neq 0\,,\quad f_8(x) \;=\; \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(1+x^4)}\,,\quad f_9(x) \;=\; \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\sqrt{x+\sin x}}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,,$$
$$f_6(0) \;=\; a_6\,,\quad f_7(0) \;=\; a_7\,,\quad f_8(0) \;=\; a_8\,,\quad f_9(0) \;=\; a_9\,,$$
où $a_6$, $a_7$, $a_8$ et $a_9$ sont des réels,
$$f_{10}(x) \;=\; \frac{x+\sin x}{1+x^2}\,,\quad f_{11}(x) \;=\; \cos x\,,\quad f_{12}(x) \;=\; \frac{\cos x\,\sin x}{1+x^2}\,.$$

**Exercice 91. :** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$. On note par $\mathcal{E}(\Omega)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fontions étagées de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure positive.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On pose
$$I_\mu f \;=\; \sup\left\{\int g\,d\mu\,;\ g \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ et } 0 \le g \le f\right\}\,.$$
Montrer qu'il existe une suite croissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que
$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu \;=\; I_\mu f\,.$$
**Remarque :** Lorsque $f$ est $(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable alors $I_\mu f$ est l'intégrale de $f$ sur $\Omega$ par rapport à la mesure $\mu$ et on a, par l'exercice 67, l'existence d'une suite croissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers $f$. Dans ce cas, le théorème de Beppo-Lévy redonne le résultat ci-dessus.
Si maintenant $f$ n'est pas mesurable relativement à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $f$ ne peut être limite simple d'une suite de fonctions étagées (cf. cours) donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue plus haut ne converge pas simplement vers $f$. Ce dernier point incite à n'utiliser $I_\mu f$ pour définir l'intégrale de $f$ par rapport à $\mu$ uniquement dans le cas où $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. C'est précisément ce que fait le cours.

**Exercice 92. :** Soit $I$ un ensemble non vide. On note par $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble non vide des parties finies non vides de $I$. Soit $\mu : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure du décompte sur $I$. À toute partie $A$ de $I$, la mesure $\mu$ associe donc le cardinal de $A$.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ ou bien, de manière équivalente, soit $u : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application qui, à $i \in I$, associe $u(i) = u_i$. On remarque que $u$ est mesurable relativement à $\mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$. On rappelle que la somme de cette famille est définie par

$$\sum_{i\in I} u_i \;=\; \sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \sum_{j\in J} u_j \;\in\; \overline{\mathbb{R}^+}\,.$$

On montre dans cet exercice que cette somme coïncide avec l'intégrale de la fonction $u$ par rapport à la mesure $\mu$ du décompte sur $I$.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(I)$. Vérifier que
$$\int \mathbb{1}_A \, d\mu \;=\; \mu(A) \;=\; \sum_{i\in A} 1\,.$$
2. Pour $J \in \mathcal{F}(I)$, soit $g_J : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la fonction définie par $g_J(i) = u_i$ si $i \in J$ et $g_J(i) = 0$ sinon. Vérifier que $g_J$ est une fonction étagée (relativement aux tribus $\mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$) vérifiant $g_J \le u$. Calculer $\int g_J \, d\mu$.
3. En déduire que
$$\sum_{i\in I} u_i \;\le\; \int u \, d\mu\,.$$
4. Soit $g : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction étagée non nulle telle que $g \le u$. On sait qu'il existe (cf. exercice 72) une famille finie $A_1, \cdots, A_n$ de parties disjointes de $I$ et $0 < a_1 < \cdots < a_n$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ tels que
$$g \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{et on pose} \quad A_0 \;=\; I \setminus \left( \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)\,.$$
Montrer que
$$\int g \, d\mu \;\le\; \sum_{i\in I} u_i\,.$$
(Indication : on pourra utiliser la sommation par paquets.)
5. En déduire que
$$\int u \, d\mu \;\le\; \sum_{i\in I} u_i\,.$$

Les points 3 et 4 donnent le résultat annoncé.

**Exercice 93. :** Soit $X$ un ensemble non vide et $\nu$ la mesure positive du décompte sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de $X$. À toute partie $A$ de $X$, la mesure $\nu$ associe donc le cardinal de $A$. On remarque que toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est mesurable relativement à $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Pour une telle fonction $f$, on note par $\mathcal{V}_f$ l'ensemble des valeurs non nulles prises par $f$ et on considère la famille

$$s_f \;=\; \Big(v \cdot \nu\big(f^{-1}(v)\big)\Big)_{v \in \mathcal{V}_f} \,,$$

où, pour $v \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(v) = \{x \in X; f(x) = v\}$ est l'image réciproque par $f$ de l'ensemble $\{v\}$. On note par $S_f$ la somme de la famille $s_f$ de termes positifs.
L'objectif de l'exercice est de montrer l'égalité

$$S_f \;=\; \int_X f\, d\nu \,. \tag{24}$$

1. Montrer que (24) est vraie si $f$ est étagée.
2. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $J$ un sous-ensemble non vide fini de $\mathcal{V}_f$. Soit $f_J : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f_J(x) = f(x)$ si $f(x) \in J$ et $f_J(x) = 0$ sinon. Vérifier que $f_J$ est étagée, $\mathcal{V}_{f_J} = J$, $f_J \leq f$ et, pour tout $v \in J$, $f_J^{-1}(v) = f^{-1}(v)$.
3. En déduire que, pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$$S_f \;\leq\; \int_X f\, d\nu \,. \tag{25}$$

4. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction étagée non nulle telle que $g \leq f$. On sait qu'il existe (cf. exercice 72) une famille finie $A_1, \cdots, A_n$ de parties disjointes de $X$ et $0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que

$$g \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \,.$$

   a). Soit $i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$. Montrer que $A_i$ est la réunion disjointe de la famille des éléments $f^{-1}(v) \cap A_i$, indexée par $\mathcal{V}_f^i = \{v \in [a_i; +\infty[; \nu(f^{-1}(v) \cap A_i) > 0\}$.
   b). On suppose qu'il existe $i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$ tel que $\nu(A_i) = +\infty$. Montrer par l'absurde que $S_f = +\infty$. (Indication : on pourra remarquer que, si $s_f$ est sommable, $\mathcal{V}_f^i$ est au plus dénombrable.)
   c). On suppose que, pour tout $i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$, $\nu(A_i) < +\infty$. Montrer que

$$\nu(A_i) \;=\; \sum_{v \in \mathcal{V}_f^i} \nu\Big(f^{-1}(v) \,\cap\, A_i\Big) \,, \tag{26}$$

   où tous les termes sont finis et $\mathcal{V}_f^i$ est un ensemble fini. En déduire que

$$\int_X g\, d\nu \;\leq\; S_f \,. \tag{27}$$

5. Montrer que

$$S_f \;\geq\; \int_X f\, d\nu \,, \tag{28}$$

   ce qui, en conjonction avec (25), prouve (24).

6. Retrouver (24) en utilisant l'exercice 92.
   (Indication : on pourra utiliser une sommation par paquets.)

**Exercice 94. :** On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$ définie dans l'exercice 40. On rappelle que $\mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle aussi que $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des singletons de $\mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure positive définie par $\mu(A) = 0$ si $A \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ et $\mu(A) = 1$ sinon (cf. exercice 61). Soit $f$ une fonction positive appartenant à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_d(\mathbb{R}); \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. D'après l'exercice 76, on sait que l'ensemble $\mathcal{V}_f$ des valeurs de $f$ est un ensemble au plus dénombrable. De plus, il existe un unique $v_0 \in \mathcal{V}_f$ tel que $f^{-1}(v_0) \in \mathcal{P}_{cd}(\mathbb{R})$.

1. Soit $\nu : \mathcal{T}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\nu(A) = 1$ si $A \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ et $\nu(A) = 0$ sinon. Vérifier que $\nu$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) \;=\; \sum_{v \in \mathcal{V}_f} v \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(v)}(x)$$
   et qu'il y a au plus un terme non nul dans la somme.
3. Montrer que
$$\int f \, d\nu \;=\; \sum_{v \in \mathcal{V}_f \setminus \{v_0\}} v \,.$$
4. Montrer que
$$\int f \, d\mu \;=\; v_0 \,.$$
5. Déterminer
$$\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\nu \quad \text{et} \quad \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\mu \,.$$