Théorèmes fondamentaux.

Exercice 96. : On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit μ une mesure positive sur une espace mesurable $(\Omega;\mathcal{T})$. Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction positive et mesurable telle que

$$\int f\,d\mu \;=\; 0\,.$$

Montrer que f est nulle μ presque partout.
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 87.)

Exercice 97. : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ absolument intégrable sur tout compact inclu dans I (pour la mesure de Lebesgue λ). Cela signifie que $f\in\mathcal{M}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})|I;\mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$ et que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ qui est inclu dans I, on a

$$\int_K |f|\,d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} |f|\cdot\mathbb{1}_K\,d\lambda \;<\; +\infty\,.$$

Soit $a\in I$ et $F:I\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_a^x f$ c'est-à-dire

$$F(x) \;=\; \int_{]a;x]} f\,d\lambda\,,\quad \text{si } x\in I\cap[a;+\infty[\,,\text{ et}\quad F(x) \;=\; -\int_{]x;a]} f\,d\lambda\,,\quad \text{si } x\in I\cap]-\infty;a[\,.$$

1. Soit $(b;c)\in I^2$ tel que $b\le c$. Vérifier que
$$\int_{[b;c]} f \;=\; \int_{]b;c]} f \;=\; \int_{[b;c[} f \;=\; \int_{]b;c[} f \;=\; F(c)\,-\,F(b)\,.$$
2. Montrer que F est continue.
3. Soit $b\in I\setminus\{a\}$. Pour $x\in I$ vérifiant $|x-b|<|x-a|$, montrer que
$$F(x)\,-\,F(b)\,-\,(x-b)\cdot f(b) \;=\; -\int_{]x;b]}\big(f\,-\,f(b)\big)\,,\quad \text{si } x<b\,,$$
$$F(x)\,-\,F(b)\,-\,(x-b)\cdot f(b) \;=\; \int_{]b;x]}\big(f\,-\,f(b)\big)\,,\quad \text{si } x\ge b\,.$$
4. Pour $x\in I$, vérifier que
$$F(x)\,-\,F(a)\,-\,(x-a)\cdot f(a) \;=\; -\int_{]x;a]}\big(f\,-\,f(a)\big)\,,\quad \text{si } x<a\,,$$
$$F(x)\,-\,F(a)\,-\,(x-a)\cdot f(a) \;=\; \int_{]a;x]}\big(f\,-\,f(a)\big)\,,\quad \text{si } x\ge a\,.$$

5. On suppose f continue en $b \in I$. Montrer qu'alors F est dérivable en b et que $F'(b) = f(b)$.

Remarque : Lorsque f est continue sur I, la fonction F coïncide avec la primitive $I \ni x \mapsto \int_a^x f$, où l'intégrale est une intégrale de Riemann.

Exercice 98. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = (1 + x/n)^n$.

1. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$g(t) \;=\; \ln\bigl(1+t\bigr) \;-\; \frac{t}{1+t}\,.$$
Montrer que g est positive.
2. Soit $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2;\, x \geq 0, y > 0\}$ et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $F(x;y) = (1 + x/y)^y$. Montrer que $\partial F/\partial y$ existe sur D et y est partout positive.
3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions.
4. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on explicitera.
5. Montrer l'existence et calculer les limites
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) \cdot e^{-2x}\, dx \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0;n]} f_n(x) \cdot e^{-2x}\, dx\,.$$

Exercice 99. : En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer l'existence et calculer les limites
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0;1]} x^n\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0;\pi]} \bigl(\sin x\bigr)^n\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0;2\pi]} \bigl(\sin x\bigr)^n\, dx\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0;\pi]} \frac{\bigl(\cos x\bigr)^n}{\sqrt{x}}\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0;1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+x)^n} \cdot e^{-x}\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{(-1)^n}{(1+x)^n} \cdot e^{-x}\, dx\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\bigl(\sin x\bigr)^n}{(1+x)^{(n^{-1}+2)}}\, dx\,.$$

Exercice 100. : Soit $\theta \in]0; 2\pi[$.

1. Montrer que
$$\Re\left(\int_{[0;1]} \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx\right) \;=\; -\ln\bigl|2\sin(\theta/2)\bigr|\,.$$
2. Montrer que
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_{[0;1]} e^{i(n+1)\theta} \cdot x^n\, dx \;=\; \int_{[0;1]} \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx\,.$$
(Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.)

3. En déduire que la série
$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p}\cdot\cos(p\,\theta)$$
est convergente et que sa somme est $-\ln|2\sin(\theta/2)|$.

Exercice 101. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ intégrable. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int f(t)\cdot\big(\sin t\big)^n\,dt \;=\; 0\,.$$

Exercice 102. : Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}\,.$$
Vérifier que f est mesurable. Déterminer
$$I \;=\; \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Exercice 103. : Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=0$ si $|x|\geq 1$, $\varphi(x)=x+1$ si $x\in]-1;0]$ et $\varphi(x)=1-x$ si $x\in]0;1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\varphi_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x)=n\varphi(nx)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle. Vérifier que $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\varphi_n(x)=0$ si $|x|\geq 1$. En déduire que φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.
3. Soit $\eta\in]0;1]$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{-\eta}|\varphi_n(t)|\,dt \;+\; \int_{\eta}^{+\infty}|\varphi_n(t)|\,dt\right) \;=\; 0\,.$$
4. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\varphi_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt \;=\; f(0)\,. \tag{29}$$
(Indication : on pourra écrire $f(0)=\int_{\mathbb{R}} f(0)\varphi_n(t)\,dt$, utiliser le fait que chaque φ_n est positive et les questions précédentes.)
5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la limite (29) ?

Exercice 104. : Soit $(\Omega;\mathcal{T};\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et μ-intégrables qui converge simplement vers une fonction f. On sait que f est mesurable. Soit

$$a \;=\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \left(\int_\Omega |f_n|\,d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\in\; \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}.$$

1. On suppose que a est bornée. Montrer que f est μ-intégrable.
2. On suppose que f est μ-intégrable et que
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \big|f_n - f\big|\,d\mu \;=\; 0\,. \tag{30}$$
Vérifier que
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu \;=\; \int_\Omega f\,d\mu\,. \tag{31}$$
Montrer que la suite a converge vers $\int |f|\,d\mu$.
3. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\geq 0$, que f est μ-intégrable et que la suite a converge vers $\int f\,d\mu$. Montrer qu'alors (30) est vraie.
(Indication : on pourra utiliser, pour $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, que $|x-y| = x+y-2\min(x;y)$.)
4. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables, μ-intégrables et positives, qui converge simplement, pour lequel la suite a est convergente et (30) est fausse. Pourquoi (31) est-elle fausse dans ce cas ?
5. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables, μ-intégrables et positives, qui converge simplement, pour lequel la suite a est bornée mais ne converge pas. Pourquoi (30) est-elle fausse dans ce cas ?
6. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables et μ-intégrables, qui converge simplement, pour lequel a est bornée, (31) est vraie mais (30) est fausse.

Exercice 105. : Soit $(\Omega;\mathcal{T};\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables bornées de Ω dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. On sait que f est mesurable.

1. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est μ-intégrable.
2. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$ et que la suite
$$\big(\sup|f_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
est bornée. Montrer que f est μ-intégrable.
3. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Ω, c'est-à-dire que
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|f_n(x) - f(x)\big| \;=\; 0\,.$$
Montrer que f est μ-intégrable et que
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu \;=\; \int_\Omega f\,d\mu\,. \tag{32}$$

4. Dans le cas où $\mu(\Omega) < +\infty$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables bornées pour lequel f n'est pas μ-intégrable.
5. Dans le cas où $\mu(\Omega) < +\infty$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables bornées pour lequel f est μ-intégrable mais (32) est fausse.
6. Dans le cas $\mu(\Omega) = +\infty$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables bornées pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Ω mais (32) est fausse.

Exercice 106. : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que sa dérivée f' soit intégrable. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. (Indication : on pourra utiliser le critère de Cauchy.)

Exercice 107. : Soit $F :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$F(x) \; = \; \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) \; = \; \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t+x}\, dt \, .$$

1. Vérifier que $G(0)$ est bien défini.
2. Montrer que F et G sont bien définies et continues.
3. Montrer que $\lim\limits_{0^+} F = +\infty$.
4. Déterminer un équivalent de F quand $x \to 0^+$.

Exercice 108. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive qui est λ-intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\lim_{b\to a^-} \int_{[b;a]} f \, d\lambda \; = \; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{b\to a^+} \int_{[a;b]} f \, d\lambda \; = \; 0 \, .$$

2. On suppose que f est bornée sur $[a; a+1]$. Montrer que, lorsque $b \to a^+$,

$$\int_{[a;b]} f \, d\lambda \; = \; O(b-a) \, . \tag{33}$$

3. Donner un exemple de fonction f pour lequel (33) est fausse.
4. Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$ telle que a est un atome pour μ, i.e. $\mu(\{a\}) > 0$. On suppose que f est continue. Que peut-on dire de

$$\lim_{b\to a^+} \int_{[a;b]} f \, d\mu \; ?$$

Exercice 109. : Soit $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$F(x) \;=\; \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) \;=\; \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\,.$$

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) + G'(x) = 0$. En déduire $F + G$.
2. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} G = 0$. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Exercice 110. : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cdot e^{itx}\,dt\,.$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire $2y' + xy = 0$.
3. En déduire, en utilisant l'exercice 109, que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-x^2/4}\,.$$

Exercice 111. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n, J_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$I_n(x) \;=\; \int_0^{+\infty} t^{n-1} \cdot e^{-xt}\,dt \quad \text{et} \quad J_n(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}\,.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n et J_n sont bien définies et dérivables. Montrer que, pour tout $x > 0$, $I_n'(x) = -I_{n+1}(x)$ et $J_n'(x) = -nJ_{n+1}(x)$.
2. Calculer, pour tout $x > 0$, $I_1(x)$ et $J_1(x)$. En déduire que, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des formules explicites pour $I_n(x)$ et $J_n(x)$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de

$$\Gamma(n) \;:=\; \int_0^{+\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}\,.$$

Exercice 112. : Soit $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot e^{-xt}\,dt\,.$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Donner une expression explicite de F'' sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Étudier les limites en $+\infty$ de F et F'.
4. En déduire que, pour $x > 0$,

$$F(x) \;=\; \frac{\pi}{2} \;-\; \frac{x}{4} \cdot \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \;-\; \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) .$$

5. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt .$$

Exercice 113. : Soit $\Gamma :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\Gamma(x) \;=\; \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt .$$

C'est la fonction "Gamma".

1. Montrer que Γ est bien définie et continue. Que vaut $\Gamma(1)$?
2. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $\lim_{0^+} \Gamma = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \Gamma = +\infty$.
3. Montrer que Γ est de classe C^∞ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma^{(p)}(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \big(\ln t\big)^p \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt .$$

4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.
5. En déduire que $\Gamma(x)$ est équivalent à $1/x$, lorsque $x \to 0^+$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 114. : Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une bijection strictement croissante de classe C^2. On note par $\varphi^{\langle -1 \rangle}$ sa bijection réciproque. On remarque que, nécessairement, $\varphi(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(0) = 1$ et que $e^{-\varphi} f$ est intégrable. On considère la fonction $F :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x > 1$,

$$F(x) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} \cdot f(t)\, dt .$$

On s'intéresse au comportement de F lorsque $x \to +\infty$.

1. Montrer que F est bien définie et continue.
2. Pour $f : t \mapsto 1$ et $\varphi : t \mapsto t$, déterminer $F(x)$, pour tout $x > 1$.
3. Pour $f : t \mapsto 1$ et $\varphi : t \mapsto t^2$, déterminer $F(x)$, pour tout $x > 1$.
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 109.)

4. On considère le cas où $f : t \mapsto 1$. On suppose que $\varphi'(0) > 0$. Pour simplifier l'écriture, on note par ψ la bijection réciproque $\varphi^{\langle -1 \rangle}$ de φ.
a). Soit $\delta > 0$ tel que $\varphi' > 0$ sur $[0;\delta]$. Montrer que, pour $x > 1$,
$$\left| x \cdot \int_0^{\delta} e^{-x\varphi(t)}\, dt \;-\; \psi'(0) \right|$$
$$\leq\; e^{-x\psi(\delta)}\psi'(0) \;+\; \left(1 - e^{-x\psi(\delta)}\right) \cdot \sup_{u \in [0;\psi(\delta)]} \left|\psi'(t) \;-\; \psi'(0)\right| .$$
b). Montrer que, pour $x > 1$,
$$0 \;\leq\; x \cdot \int_{\delta}^{+\infty} e^{-x\varphi(t)}\, dt \;\leq\; x \cdot e^{-(x-1)\varphi(\delta)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)}\, dt \, .$$
c). En déduire que F est équivalente à $\left(\varphi^{\langle -1 \rangle}\right)'(0)/x$ quand $x \to +\infty$.
5. Toujours dans le cas où $f : t \mapsto 1$, on suppose que $\varphi : t \mapsto t^2$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, on a
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \int_0^{\delta} e^{-x\varphi(t)}\, dt \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du \, .$$
En déduire que F est équivalente à $\sqrt{\pi}/(2\sqrt{x})$ quand $x \to +\infty$.
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 109.)
6. Encore dans le cas où $f : t \mapsto 1$, on suppose que $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$. Montrer que F est équivalente à $\sqrt{\pi}/\sqrt{2x\varphi''(0)}$ quand $x \to +\infty$.
7. On ne suppose plus que f est constante égale à 1. Vérifier que, si $\varphi'(0) > 0$, F est encore équivalente à $\left(\varphi^{\langle -1 \rangle}\right)'(0)/x$ quand $x \to +\infty$.
8. On ne suppose plus que f est constante égale à 1. Vérifier que, dans le cas où $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$, F est encore équivalente à $\sqrt{\pi}/\sqrt{2x\varphi''(0)}$ quand $x \to +\infty$.