Ici $[x;y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I. On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).
On va montrer que, nécessairement, I est d'un des types suivants : $]\inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $]\inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Vérifier que, pour $(a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$. $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$ et $[a;b]$ sont des intervalles (quand ils sont non vides).
2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition ($\inf I < x < \sup I$) soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x \in I$ tel que $\inf I < x < \sup I$. Montrer qu'il existe $(y;z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $]\inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $]\inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $]\inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.

Exercice 20. : Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$ (la base) et $C_b = \{0; 1; \cdots; b-1\}$ (l'ensemble des chiffres). Soit S_f l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in C_b$, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ pour $n > N$. Pour $N \in \mathbb{N}$, soit S_f^N le sous-ensemble de S_f constitué des suites a telles que $a_N \neq 0$ et $a_n = 0$ pour $n > N$. On a donc

$$S_f \;=\; \{0\} \cup \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_f^N \,.$$

Soit $d : S_f \longrightarrow \mathbb{N}$ définie, pour $a \in S_f$, par la somme finie

$$d(a) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n \,.$$

1. Vérifier que la suite $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n \geq nb$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$ et a une suite à valeurs dans C_b telle que $a_N \neq 0$. Montrer que
$$b^N \;\leq\; \sum_{n=0}^{N} a_n b^n \leq b^{N+1} - 1 \,.$$
3. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'application $d_N : S_f^N \longrightarrow [\![b^N; b^{N+1} [\![$ donnée par $d_N(a) = d(a)$ est bien définie.
4. Montrer par récurrence sur N que d_N est injective pour tout $N \in \mathbb{N}$.
5. Montrer par récurrence sur N que d_N est surjective pour tout $N \in \mathbb{N}$.
6. En déduire que d est bijective.

Tout entier naturel n s'écrit donc $d(a)$ pour une et une seule suite de chiffres $a \in S_f$. $d(a)$ est son développement en b.